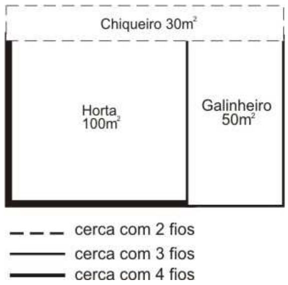
NÍVEL 1 - Prova da 2ª fase - Soluções



QUESTÃO 1 (a) A área do terreno do João Grilo é igual à soma das áreas da horta, do galinheiro e do chiqueiro, ou seja, é igual a $30+100+50=180$ m^2.

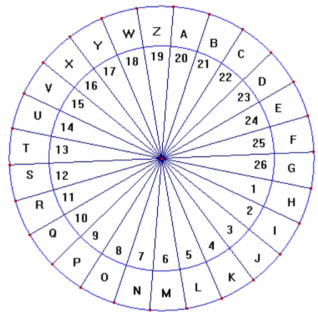
(b) A área de um quadrado de lado a é a^2 e a área de um retângulo de lados a e b é ab. Como a horta é quadrada e tem 100 m^2 de área, concluímos que cada lado da horta mede 10 m, pois $100=10^2$. Assim, o lado comum do galinheiro e da horta mede 10 m. Como a área do galinheiro é igual a 50 m^2, a medida de outro lado é 5 m, pois $10\times 5=50$. Logo as medidas dos lados do galinheiro são 10 m e 5 m.

(c) O chiqueiro tem um lado formado por um lado da horta e um dos lados menores do galinheiro. Logo esse lado mede $10+5=15$ m; como a área do chiqueiro é 30 m^2, a medida de outro lado é 2 m, pois $15\times 2=30$ m. Observando a planta e a legenda indicando o número de fios de cada um dos lados cercados, concluímos que João Grilo usou

$$\underbrace{2\times 4\times 10}_{\textit{lados em traço grosso}}+\underbrace{2\times 3\times 10+1\times 3\times 5}_{\textit{lados em traço fino}}+\underbrace{2\times 2\times(2+15)}_{\textit{lados em pontilhado}}=80+60+15+68=223$$

metros de arame.

QUESTÃO 2 (a) A partir da figura do enunciado temos 23=S, 25=U, 7=C, 22=R e 13=I. Logo a palavra codificada como 23-25-7-25-22-13 é SUCURI.



(b) Para a chave 20 temos a figura ao lado, onde vemos que O=8, B=21, M=6, E=24 e P=9. Assim, a codificação de OBMEP é 8-21-6-24-9.

Alternativamente, ao passar da chave 5 para a chave 20 devemos somar 15 aos números da figura do enunciado, lembrando que se a soma for maior do que 26 devemos subtrair 26. Assim, temos

$$O=19+15-26=34-26=8,\ B=6+15=21,\ M=17+15-26=6,$$

$$E=9+15=24,\ P=20+15-26=9$$

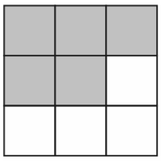
donde OBMEP é codificada como 8-21-6-24-9.

(c) Como não existe letra codificada como 0, um dos números associados a letras na seqüência 2620138 é o 20. À sua direita há três dígitos, mas como não há letra codificada como 138 ou 38, os números associados a letras são o 13 e o 8. Isto dá um total de 3 letras. Portanto, à esquerda de 20 só podemos admitir o 26. Logo, a codificação da palavra é 26-20-13-8, a qual, na chave 20, corresponde a GATO.

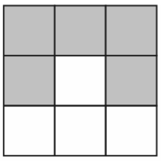
(d) Quando somamos três números consecutivos, obtemos um número divisível por 3; por exemplo, $14+15+16=45$. Ao somar os números que representam as letras A, B e C nessa certa chave, obtemos 52, que não é um número divisível por 3. Isso mostra que os três números não são consecutivos e isso somente é possível se um dos números for 26 e outro for 1. Como a soma é 52, o terceiro número é $52-27=25$. A única codificação de ABC, neste caso, é 25-26-1, ou seja, a chave é 25.

NÍVEL 1 - Prova da 2ª fase - Soluções

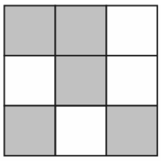
QUESTÃO 3 (a) Mostramos a seguir uma figura para cada perímetro. Há várias possibilidades para os três primeiros casos, mas a de perímetro 20 cm é a única.



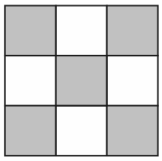
perímetro 10 cm



perímetro 12 cm

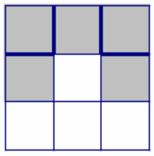


perímetro 16 cm



perímetro 20 cm

(b) Cada quadradinho tem perímetro 4 cm. A soma dos perímetros de 5 quadradinhos é igual a $4 \times 5 = 20$ cm, logo o perímetro de uma figura não pode ser maior que 20 cm. Como o item anterior mostra que há uma figura de perímetro 20 cm, segue que o perímetro máximo de uma figura é 20 cm.



(c) *1ª solução:* Cinco quadradinhos sem lados comuns têm um perímetro total de $5 \times 4 = 20$ cm. Cada lado comum entre dois quadradinhos subtrai 2 cm desse total, pois esses dois lados (um de cada quadradinho) não são mais contados no cálculo do perímetro. Por exemplo, na figura ao lado existem quatro lados comuns a dois quadrados (marcados em traço mais grosso), logo seu perímetro é $20 - 4 \times 2 = 12$ cm. Em geral, o perímetro de uma figura formada por 5 quadradinhos é $20 - 2 \times (\text{número de lados comuns entre os quadradinhos})$ cm. Esse número é a diferença entre dois números pares, logo é par.

2ª solução: Essa solução é parecida com a primeira, só que aqui construímos uma figura quadradinho a quadradinho. O primeiro quadradinho tem perímetro 4 cm. Ao adicionar o segundo quadradinho o perímetro passa a ser

$$8 - 2 \times (\text{número de lados comuns entre os quadradinhos})\ \text{cm}$$

que é um número par. Ao adicionar o terceiro quadradinho o perímetro passa a ser

$$12 - 2 \times (\text{número de lados comuns entre os quadradinhos})\ \text{cm}$$

que também é um número par, e assim por diante até chegarmos aos cinco quadradinhos.

QUESTÃO 4 (a) Como o número total de alunos é igual ao número de alunos que comem peixe mais o número de alunos que não comem peixe, podemos escrever

$$\frac{\text{não comem peixe} + \text{comem peixe}}{\text{total}} = \frac{\text{não comem peixe}}{\text{total}} + \frac{\text{comem peixe}}{\text{total}} = 1$$

ou seja

$$\frac{\text{não comem peixe}}{\text{total}} = 1 - \frac{\text{comem peixe}}{\text{total}} = 1 - \frac{13}{18} = \frac{18-13}{18} = \frac{5}{18}$$

De forma semelhante, calculamos a fração correspondente aos alunos que não comem verdura:

$$\frac{\text{não comem verdura}}{\text{total}} = 1 - \frac{\text{comem verdura}}{\text{total}} = 1 - \frac{5}{12} = \frac{12-5}{18} = \frac{7}{12}$$

e podemos então completar a tabela:

	peixe	*verdura*
sim	$\frac{13}{18}$	$\frac{5}{12}$
não	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{12}$

(b) *1ª solução*: Como $\frac{13}{18} > \frac{7}{12}$, vemos que o número de alunos que comem peixe é maior que o número de alunos que não comem verdura. Logo, entre os alunos que comem peixe, há pelo menos um que também come verdura. Alternativamente, como $\frac{5}{12} > \frac{5}{18}$, vemos que o número de alunos que comem verdura é maior que o número de alunos que não comem peixe, e a conclusão segue do mesmo modo.

2ª solução: Como

$$\frac{\text{comem peixe} + \text{comem verdura}}{\text{total}} = \frac{\text{comem peixe}}{\text{total}} + \frac{\text{comem verdura}}{\text{total}} = \frac{13}{18} + \frac{5}{12} = \frac{26+15}{36} = \frac{41}{36} > 1$$

temos $\textit{comem peixe} + \textit{comem verdura} > \textit{total}$, o que só é possível quando pelo menos um aluno come peixe e também verdura. Alternativamente, temos $\frac{5}{18} + \frac{7}{12} = \frac{31}{36} < 1$, o que nos mostra que $\textit{não comem peixe} + \textit{não comem verdura} < \textit{total}$ e a conclusão segue do mesmo modo.

(c) Como todos os alunos que comem verdura também comem peixe temos

$$\frac{\text{comem peixe mas não comem verdura}}{\text{total}} = \frac{\text{comem peixe} - \text{comem verdura}}{\text{total}}$$
$$= \frac{\text{comem peixe}}{\text{total}} - \frac{\text{comem verdura}}{\text{total}} = \frac{13}{18} - \frac{5}{12} = \frac{26-15}{36} = \frac{11}{36}$$

Logo $\frac{11}{36}$ do número total de alunos corresponde a 22 alunos. Logo $\frac{1}{36}$ do número total de alunos corresponde a $\frac{22}{11} = 2$ alunos e então o número total de alunos é $\frac{36}{11} \times 22 = 72$. Logo o número de alunos que não comem verdura é $\frac{7}{12} \times 72 = 42$.

QUESTÃO 5 (a) Abaixo listamos as torres que a Caroba pode fazer com três peças:

- com duas peças de 4 cm e uma de 2 cm: (4,4,2), (4,2,4), (2,4,4);
- com uma peça de 4 cm e duas de 3 cm: (4,3,3), (3,4,3), (3,3,4);

(b) Ela pode montar, por exemplo, quatro torres (4,4,2), uma torre (4,3,3) e duas torres (3,3,2,2), restando uma peça de 2 cm e três peças de 3 cm. Outra possibilidade é fazer quatro torres (4,3,3), duas torres (4,4,2) e uma torre (2,2,2,2,2), restando uma peça de 4 cm, uma peça de 3 cm e duas peças de 2 cm. Pode-se também aproveitar as torres do item (a) e montar, além delas, a torre (3,3,2,2), sobrando uma peça de 3 cm e quatro peças de 2 cm. Há ainda outras possibilidades.

(c) *1ª solução*: O comprimento total de todas as peças que a Caroba tem é $9 \times (2+3+4) = 9 \times 9 = 81$ cm. Se ela pudesse fazer 8 torres de 10 cm, a soma dos comprimentos dessas torres seria 80 cm, ou seja, sobraria 1 cm. Como não existe peça de 1 cm, concluímos que é impossível montar 8 torres de 10 cm com 9 peças de cada uma das cores.

2ª solução: Peças de 3 cm aparecem 0 ou 2 vezes em qualquer torre de 10 cm, donde o número de peças de 3 cm usadas para fazer qualquer número de torres é par. Como a Caroba tem 9 peças de 3 cm, segue que vai sobrar pelo menos uma peça de 3 cm, qualquer que seja o número de torres que ela montar. Descontando essa peça, o comprimento total das peças que sobram é $81-3=78$ cm, que não é suficiente para montar 8 torres de 10 cm. Logo a Caroba não vai conseguir montar as 8 torres de 10 cm.

QUESTÃO 6 (a) O time B não perdeu nenhuma partida, logo empatou ou ganhou de A. Mas A não empatou nenhuma partida, logo A perdeu de B.

(b) O time A perdeu uma partida. Se tivesse perdido exatamente mais um jogo, teria 6 pontos. Mas B tem no mínimo 6 pontos, pois venceu A e não perdeu nenhuma das outras três partidas. Como A tem mais pontos que B, concluímos que A perdeu somente para B; e como A não empatou nenhuma partida, venceu as outras três. Logo A obteve 9 pontos.

(c) *1ª solução*: Como o time B não perdeu para nenhum outro time, ele ganhou 1 ou 3 pontos em cada partida, isto é, sempre um número ímpar de pontos. Como a soma de quatro números ímpares é par, vemos que B terminou o torneio com um número par de pontos.

2ª solução: Como ficou em segundo lugar, o time B fez menos do que 9 pontos, portanto venceu uma ou duas partidas. Como ele jogou quatro partidas, se venceu uma delas então empatou três, finalizando com 6 pontos; se venceu duas então empatou duas, finalizando com 6 pontos. Logo, as possibilidades para o número de pontos que B obteve nesse torneio são 6 e 8, ambos números pares.

(d) De acordo com os itens anteriores, A perdeu de B e venceu C, D e E. Dos 6 jogos restantes, 5 foram empates. Se B tivesse só 2 empates, então todos os jogos entre C, D e E seriam empates e os dois desses times que empataram com B terminariam empatados, o que contraria o enunciado. Logo, os três jogos de B contra C, D e E foram empates. Como houve um total de 5 empates, 2 dos jogos entre C, D e E foram empates. Como a ordem de classificação é C, D, E, a única vitória foi de C contra E. Temos, assim, a tabela de resultados abaixo.

A	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*C*	*C*	*D*
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
B	*C*	*D*	*E*	*C*	*D*	*E*	*D*	*E*	*E*