

NÍVEL 2 - Prova da 2ª fase - Soluções

QUESTÃO 1 (a) A partir da figura do enunciado temos $23=S$, $25=U$, $7=C$, $22=R$ e $13=I$. Logo a palavra codificada como 23-25-7-25-22-13 é SUCURI.

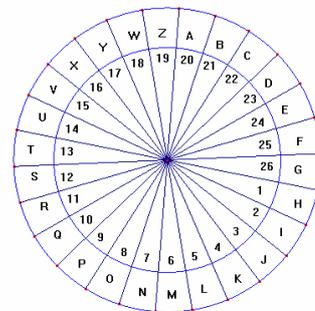
(b) Para a chave 20 temos a figura ao lado, onde vemos que $O=8$, $B=21$, $M=6$, $E=24$ e $P=9$. Assim, a codificação de OBMEP é 8-21-6-24-9.

Alternativamente, ao passar da chave 5 para a chave 20 devemos somar 15 aos números da figura do enunciado, lembrando que se a soma for maior do que 26 devemos subtrair 26. Assim, temos

$$O = 19 + 15 - 26 = 34 - 26 = 8, \quad B = 6 + 15 = 21, \quad M = 17 + 15 - 26 = 6,$$

$$E = 9 + 15 = 24, \quad P = 20 + 15 - 26 = 9$$

donde OBMEP é codificada como 8-21-6-24-9.



(c) Como não existe letra codificada como 0, um dos números associados a letras na seqüência 2620138 é o 20. À sua direita há três dígitos, mas como não há letra codificada como 138 ou 38, os números associados a letras são o 13 e o 8. Isto dá um total de 3 letras. Portanto, à esquerda de 20 só podemos admitir o 26. Logo, a codificação da palavra é 26-20-13-8, a qual, na chave 20, corresponde a GATO.

(d) Quando somamos três números consecutivos, obtemos um número divisível por 3; por exemplo, $14 + 15 + 16 = 45$. Ao somar os números que representam as letras A, B e C nessa certa chave, obtemos 52, que não é um número divisível por 3. Isso mostra que os três números não são consecutivos e isso somente é possível se um dos números for 26 e outro for 1. Como a soma é 52, o terceiro número é $52 - 27 = 25$. A única codificação de ABC, neste caso, é 25-26-1, ou seja, a chave é 25.

QUESTÃO 2 Lembramos que a área de um triângulo é dada pela fórmula $\frac{base \times altura}{2}$ e a área do retângulo por $base \times altura$. Na situação geral da

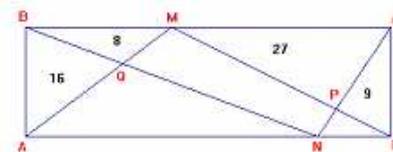
figura ao lado, segue que a área do triângulo sombreado é metade da área do retângulo, pois ambos têm a mesma base e a mesma altura. Logo a soma das áreas dos dois triângulos brancos também é metade da área do retângulo, ou seja, igual à área do triângulo sombreado.



(a) Pelo visto acima, temos $área(AMD) = área(ABM) + área(MDC) = 16 + 8 + 27 + 9 = 60 \text{ cm}^2$.

(b) Como $área(AMD) = área(BNC)$, temos

$$\begin{aligned} área(AQN) + área(NDP) &= área(AMD) - área(MNPQ) = área(BNC) - \\ &= área(BQM) + área(MPC) = 8 + 27 = 35 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

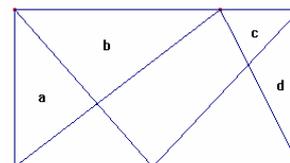


(c) Temos

$$área(MQNP) = área(BNC) - área(BQM) - área(MPC) = 60 - 8 - 27 = 25 \text{ cm}^2$$

Observação: As áreas dos triângulos nesse problema não foram escolhidas ao acaso. Fica como exercício mostrar que é possível construir a figura ao lado, onde a , b , c e d representam as áreas dos triângulos correspondentes,

se e somente se $\frac{a^2}{b} + \frac{d^2}{c} = b + c$.



NÍVEL 2 - Prova da 2ª fase - Soluções

Solução alternativa para os itens (b) e (c): Podemos resolver primeiro o item (c), como segue. Como $\text{área}(AMD) = \text{área}(BNC) = 60 \text{ cm}^2$, temos $\text{área}(MNPQ) = \text{área}(BNC) - 27 - 8 = 25 \text{ cm}^2$, obtendo então para o item (b)

$$\text{área}(AQN) + \text{área}(NDP) = \text{área}(AMD) - \text{área}(MNPQ) = 60 - 25 = 35 \text{ cm}^2$$

QUESTÃO 3 (a) Os divisores de 57 são 1, 3, 19, e 57, donde seus afilhados são 1, 3, 9 e 7.

(b) O exemplo mais simples é 49, cujos afilhados são 1, 7 e 9.

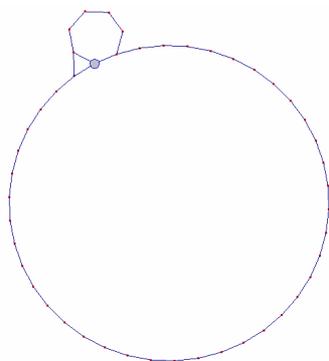
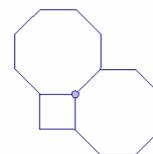
(c) Se um número tem um divisor terminado em 0 então este número é múltiplo de 10. Logo ele é múltiplo de 2 e de 5, e portanto 2 e 5 são seus afilhados.

(d) Seja N um número que tem 0 e 9 como afilhados. Pelo item anterior, 2 é afilhado de N , logo N é par. Como 9 é afilhado de N , algum número ímpar terminado em 9 é divisor de N . Portanto, N é divisível pelo produto de 2 por esse número, ou seja, N é divisível por um número terminado em 8. Logo, 8 é afilhado de N .

QUESTÃO 4 (a) Para completar a primeira coluna da tabela basta substituir os valores $n = 5, 6, 8$ na fórmula $(n-2) \times 180^\circ$. Para completar a segunda coluna, basta dividir os valores da primeira coluna pelo valor correspondente de n , ou seja, calcular $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$; a justificativa para essa expressão é que polígono de n lados tem n ângulos internos iguais, cuja soma é $(n-2) \times 180^\circ$. A tabela completa é dada abaixo.

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	180°	60°
4	360°	90°
5	540°	108°
6	720°	120°
8	1080°	135°

(b) O ângulo interno de um quadrado é 90° e o de um octógono regular é 135° . Para que alguns polígonos regulares se encaixem, a soma de seus ângulos internos deve ser 360° . Como $90^\circ + 135^\circ + 135^\circ = 360^\circ$, segue que um quadrado e dois octógonos regulares se encaixam.



(c) O ângulo interno de um triângulo equilátero é 60° e o de um heptágono regular é $\frac{7-2}{7} \times 180^\circ = \frac{5}{7} \times 180^\circ$. Seja n o número de lados do terceiro polígono; o ângulo interno desse polígono é então $\frac{n-2}{n} \times 180^\circ$. Como os três polígonos se encaixam, temos

$$60^\circ + \frac{5}{7} \times 180^\circ + \frac{n-2}{n} \times 180^\circ = 360^\circ.$$

NÍVEL 2 - Prova da 2ª fase - Soluções

Logo

$$1 + \frac{5}{7} \times 3 + \frac{n-2}{n} \times 3 = 6$$

ou seja, $7n + 15n + 21(n-2) = 42n$, donde $n = 42$.

QUESTÃO 5 (a) O time B não perdeu nenhuma partida, logo empatou ou ganhou de A. Mas A não empatou nenhuma partida, logo A perdeu de B.

(b) O time A perdeu uma partida. Se tivesse perdido exatamente mais um jogo, teria 6 pontos. Mas B tem no mínimo 6 pontos, pois venceu A e não perdeu nenhuma das outras três partidas. Como A tem mais pontos que B, concluímos que A perdeu somente para B; e como A não empatou nenhuma partida, venceu as outras três. Logo A obteve 9 pontos.

(c) *1ª solução:* Como o time B não perdeu para nenhum outro time, ele ganhou 1 ou 3 pontos em cada partida, isto é, sempre um número ímpar de pontos. Como a soma de quatro números ímpares é par, vemos que B terminou o torneio com um número par de pontos.

2ª solução: Como ficou em segundo lugar, o time B fez menos do que 9 pontos, portanto venceu uma ou duas partidas. Como ele jogou quatro partidas, se venceu uma delas então empatou três, finalizando com 6 pontos; se venceu duas então empatou duas, finalizando com 6 pontos. Logo, as possibilidades para o número de pontos que B obteve nesse torneio são 6 e 8, ambos números pares.

(d) De acordo com os itens anteriores, A perdeu de B e venceu C, D e E. Dos 6 jogos restantes, 5 foram empates. Se B tivesse só 2 empates, então todos os jogos entre C, D e E seriam empates e os dois desses times que empataram com B terminariam empatados, o que contraria o enunciado. Logo, os três jogos de B contra C, D e E foram empates. Como houve um total de 5 empates, 2 dos jogos entre C, D e E foram empates. Como a ordem de classificação é C, D, E, a única vitória foi de C contra E. Temos, assim, a tabela de resultados abaixo.

A	A	A	A	B	B	B	C	C	D
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
B	C	D	E	C	D	E	D	E	E

QUESTÃO 6 (a) Como saiu ímpar na primeira jogada, Isaura deu metade dos seus palitos para o Fernando; desse modo, Isaura ficou com 64 palitos, e como o número total de palitos é 256 segue que Fernando ficou com $256 - 64 = 192$ palitos.. Do mesmo modo, após a segunda jogada Isaura ficou com 32 palitos e Fernando com $256 - 32 = 224$ palitos. Na terceira jogada saiu par, e Fernando deu metade de seus palitos para a Isaura; logo, Fernando ficou com 112 palitos e Isaura com $256 - 112 = 144$ palitos.

Fernando	Isaura	$\xrightarrow[\text{1ª jogada}]{\text{ímpar}}$	Fernando	Isaura	$\xrightarrow[\text{2ª jogada}]{\text{ímpar}}$	Fernando	Isaura	$\xrightarrow[\text{3ª jogada}]{\text{par}}$	Fernando	Isaura	...
128	128		192	64		224	32		112	144	

(b) *1ª solução:* Após qualquer jogada, o perdedor não pode ter mais que 127 palitos; de fato, se isso ocorresse, antes dessa jogada ele teria pelo menos $2 \times 128 = 256$ palitos, o que não pode acontecer. O ganhador terá então no mínimo $256 - 127 = 129$ palitos; logo, o ganhador da jogada anterior é aquele que tem mais palitos.

2ª solução: Suponhamos que em um dado momento Fernando tem x palitos e Isaura tem y palitos; notamos que como $x + y = 256$, que é um número par, então x e y são ambos pares ou

NÍVEL 2 - Prova da 2ª fase - Soluções

ambos ímpares. Se o jogo ainda não acabou, então x e y são pares, e depois da jogada seguinte podem acontecer as seguintes situações:

- saiu **par**: nesse caso Fernando fica com $\frac{x}{2}$ palitos e Isaura com $y + \frac{x}{2}$ palitos, ou seja, Isaura fica com mais palitos do que Fernando;
- saiu **ímpar**: nesse caso Fernando fica com $x + \frac{y}{2}$ palitos e Isaura com $\frac{y}{2}$ palitos, ou seja, Fernando fica com mais palitos do que Isaura.

Isso mostra que basta saber quem tem o maior número de palitos para determinar o resultado da última jogada: se Isaura tiver mais, o resultado foi par e se Fernando tiver mais, o resultado foi ímpar. No nosso caso, a partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos e Isaura com $256 - 101 = 155$ palitos. Logo o resultado da última jogada foi **par**.

(c) Aplicamos o raciocínio do item (b) para recuperar as jogadas uma a uma em ordem inversa, do seguinte modo:

Fernando	Isaura	Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu par ; então Fernando tinha $2 \times 101 = 202$ palitos e Isaura tinha $256 - 202 = 54$ palitos;
101	155	

Fernando	Isaura	Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu ímpar ; então Isaura tinha $2 \times 54 = 108$ palitos e Fernando tinha $256 - 108 = 148$ palitos;
202	54	

Fernando	Isaura	Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu ímpar ; então Isaura tinha $2 \times 108 = 216$ palitos e Isaura tinha $256 - 216 = 40$ palitos;
148	108	

Fernando	Isaura	Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu par ; então Fernando tinha $2 \times 40 = 80$ palitos e Fernando tinha $256 - 80 = 176$ palitos;
40	216	

Fernando	Isaura	Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu par ; então Fernando tinha $2 \times 80 = 160$ palitos e Fernando tinha $256 - 160 = 96$ palitos;
80	176	

Fernando	Isaura	Fernando tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu ímpar ; então Isaura tinha $2 \times 96 = 192$ palitos e Fernando tinha $256 - 192 = 64$ palitos;
160	96	

Fernando	Isaura	Isaura tem mais palitos, logo na jogada anterior saiu par ; então Fernando tinha $2 \times 64 = 128$ palitos e Isaura tinha $256 - 128 = 128$ palitos. Essa é a situação inicial do jogo.
64	192	

Logo a seqüência de jogadas dessa partida foi **par, ímpar, par, par, ímpar, ímpar, par**.

(d) Vamos aproveitar o trabalho do item anterior e fazer o seguinte diagrama do número de palitos de Fernando e Isaura, jogada a jogada:

Fernando	$128 = 2^7 \times 1$	$64 = 2^6 \times 1$	$160 = 2^5 \times 5$	$80 = 2^4 \times 5$	$40 = 2^3 \times 5$	$148 = 2^2 \times 37$	$202 = 2^1 \times 101$	$101 = 2^0 \times 101$
Isaura	$128 = 2^7 \times 1$	$192 = 2^6 \times 3$	$96 = 2^5 \times 3$	$176 = 2^4 \times 11$	$216 = 2^3 \times 27$	$108 = 2^2 \times 27$	$54 = 2^1 \times 27$	$155 = 2^0 \times 155$

Esse diagrama e outros exemplos semelhantes sugerem que, em um momento qualquer de uma partida, o número de palitos de Fernando e o número de palitos de Isaura se escrevem, respectivamente, como $2^n a$ e $2^n b$, onde a e b são inteiros ímpares. Além disso, se o jogo não

NÍVEL 2 - Prova da 2ª fase - Soluções

acabou, então depois da próxima jogada eles terão $2^{n-1}a'$ e $2^{n-1}b'$ palitos, respectivamente, onde a' e b' também são inteiros ímpares.

Vamos mostrar que essas afirmativas são verdadeiras. Suponhamos que em alguma etapa de uma partida os dois jogadores têm, respectivamente, $2^n a$ e $2^n b$ palitos, onde a e b são inteiros ímpares, e que o jogo não acabou, ou seja, que $n \geq 1$. Se a próxima jogada sair par,

então Fernando ficará com $\frac{2^n a}{2} = 2^{n-1} a$ palitos e Isaura ficará com $2^{n-1} a + 2^n b = 2^{n-1}(a + 2b)$

palitos. Como a é ímpar então $b' = a + 2b$ também é ímpar. Desse modo, após essa jogada, Fernando e Isaura ficarão com $2^{n-1} a$ e $2^{n-1} b'$ palitos, onde a e b' são ímpares. Um argumento idêntico leva à mesma conclusão no caso em que a próxima jogada sair ímpar, e acabamos de provar nossa afirmativa.

O jogo começa com ambos os jogadores com $128 = 2^7 \times 1$ palitos, ou seja, com $n = 7$. Como uma partida acaba quando $n = 0$ e n decresce de uma unidade a cada jogada, segue imediatamente que qualquer partida acaba depois da sétima jogada.