01. Logo após Joaquim comprar um par de tênis novo por 70 reais, a loja aumentou seus preços em 30%. Dois meses depois, como as vendas não estavam boas, a loja resolveu fazer uma liquidação, aplicando um desconto de 30% em todos os seus produtos. Pede-se determinar o valor do par de tênis, em reais:

A) após o primeiro reajuste e antes da liquidação.

Assunto: porcentagem
Solução
Com o primeiro reajuste, o par de tênis passou a custar $70 + \frac{30}{100} \cdot 70 = 91$ reais.

Até 5 pontos.

B) durante a liquidação.

Assunto: porcentagem
Solução
Na liquidação, o novo preço passou a ser $91 - \frac{30}{100} \cdot 91 = 63{,}7$ reais.

Até 5 pontos

02. Encontre as raízes complexas da equação polinomial $x^4 - 10x^3 + 11x^2 - 10x + 1 = 0$.

Assunto: equações polinomiais

Solução
Desde que 0 não é raiz da equação dada, podemos dividir ambos os membros da mesma por x^2, obtendo, assim, a equação $x^2 - 10x + 11 - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$, que escreveremos como:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 11 = 0.$$

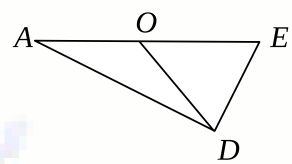
Fazendo agora a substituição $y = x + \frac{1}{x}$, segue que $y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, de maneira que $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Logo, a equação original fica reduzida à equação de segundo grau $(y^2 - 2) - 10y + 11 = 0$, cujas raízes são $y = 1$ ou $y = 9$. Por fim, resolvendo as equações de segundo grau $x + \frac{1}{x} = 1$ e $x + \frac{1}{x} = 9$, obtemos as raízes $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, $\frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}$ da equação original.

Até 10 pontos

03. Um octógono regular está inscrito em uma circunferência de raio 1. Os vértices *A*, *D* e *E* do octógono são tais que *AE* é um diâmetro de sua circunferência circunscrita e *D* e *E* são adjacentes. Determine o comprimento da diagonal *AD*.

Assunto: geometria plana; trigonometria

Solução



Se *O* é o ponto médio de *AE*, então *AO* = *OE* = *OD* = 1. Como ∠ *ADE* está inscrito em uma semi-circunferência, temos ∠ *ADE* = 90º. O arco menor *DE* mede $\frac{1}{8}\cdot 180^{o} = 45^{o}$, donde ∠ *DOE* = 45º. Temos, agora, duas soluções para o problema:

i) Pela lei dos cossenos,

$$\begin{aligned} DE^2 &= OE^2 + OD^2 - 2OE\cdot OD\cos 45^o \\ &= 1+1-2\cdot\sqrt{2}/2 \\ &= 2-\sqrt{2}, \end{aligned}$$

donde o teorema de Pitágoras nos dá $AD^2 = AE^2 - DE^2 = 4-(2-\sqrt{2}) = 2+\sqrt{2}$.

ii) Como ∠ *DAE* = 22º30’, segue da fórmula para o arco-metade que

$$\cos 22^o 30' = \sqrt{\frac{1+\cos 45^o}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Portanto,

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AE}\cdot\cos 22^o 30' = 2\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,.$$

Até 10 pontos

04. As matrizes *A* e *B* são quadradas de ordem 4 e tais que $AB = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Determine a matriz *BA*.

Assunto: matrizes e determinantes

Solução

Denotando por *I* a matriz identidade de ordem 4, temos *AB* = 9*I*, ou, ainda, $\frac{1}{9}A\cdot B = I$. Assim, *B* é uma matriz invertível, com $B^{-1} = \frac{1}{9}A$, e segue que *BA* = $B\cdot 9B^{-1} = 9I$, também.

Até 10 pontos

05. Uma urna contém bolas brancas e pretas. Determine a menor quantidade de bolas na urna, para que a probabilidade de serem pretas, duas bolas retiradas simultaneamente, seja igual a $\frac{3}{10}$.

Assunto: probabilidade
Solução
Denote respectivamente por p e t as quantidades de bolas pretas e o total de bolas na urna.
Há $\binom{t}{2}$ modos de retirarmos duas das bolas da urna; desse total, $\binom{p}{2}$ modos correspondem à retirada de duas bolas pretas. Logo, a probabilidade pedida é igual a

$$\frac{\binom{p}{2}}{\binom{t}{2}} = \frac{p(p-1)}{t(t-1)} = \frac{3}{10}.$$

Como, após simplificar a fração $\frac{p(p-1)}{t(t-1)}$ obtivemos a fração irredutível $\frac{3}{10}$, devemos ter $p(p-1) = 3m$ e $t(t-1) = 10m$ para algum inteiro positivo m. Então, nosso problema se resume a determinar o menor inteiro positivo m para que $3m$ e $10m$ possam ambos ser escritos como um produto de dois inteiros consecutivos. O menor valor $m = 2$ já fornece o resultado: $3m = 6 = 2 \cdot 3$ e $10m = 20 = 4 \cdot 5$.
Logo, $t = 5$.

Até 10 pontos

06. ABC é o triângulo, no plano cartesiano, com vértices $A(0, 0)$, $B(2, 1)$ e $C(1, 5)$. Determine as coordenadas do ponto P do plano, tal que a soma dos quadrados das distâncias de P aos vértices de ABC seja a menor possível, e calcule o valor mínimo correspondente da soma.

Assunto: geometria analítica; função do segundo grau
Solução
Queremos minimizar a expressão $AP^2 + BP^2 + CP^2$. Se $P(x, y)$, então, a fórmula para a distância entre dois pontos do plano cartesiano nos dá

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= [(x-0)^2 + (y-0)^2] + [(x-2)^2 + (y-1)^2] + [(x-1)^2 + (y-5)^2] \\ &= 3x^2 - 6x + 3y^2 - 12y + 31. \end{aligned}$$

Como x e y variam independentemente um do outro, para minimizarmos a expressão acima, basta minimizarmos os trinômios de segundo grau $f(x) = 3x^2 - 6x$ e $g(y) = 3y^2 - 12y$. Ora, os vértices de tais trinômios têm abscissas respectivamente iguais a 1 e 2, de modo que os valores desejados de x e y são $x = 1$ e $y = 2$. Para o que falta, segue de $f(1) = -3$ e $g(2) = -12$ que o valor mínimo correspondente é $-3 - 12 + 31 = 16$.

Até 10 pontos

07. Seja $z \neq 1$ um número complexo tal que $z^7 = 1$. Determine o valor numérico da expressão:

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \frac{z^3}{1-z^6} + \frac{z^4}{1-z} + \frac{z^5}{1-z^3} + \frac{z^6}{1-z^5}.$$

Assunto: números complexos
Solução
Denote por S a soma do enunciado. Levando em conta que $z^7 = 1$, obtemos, sucessivamente:

$$S = \left(\frac{z}{1-z^2}+\frac{z^6}{1-z^5}\right)+\left(\frac{z^2}{1-z^4}+\frac{z^5}{1-z^3}\right)+\left(\frac{z^3}{1-z^6}+\frac{z^4}{1-z}\right)$$
$$= \frac{(z-z^6)+(z^6-z^8)}{(1-z^2)(1-z^5)}+\frac{(z^2-z^5)+(z^5-z^9)}{(1-z^4)(1-z^3)}+\frac{(z^3-z^4)+(z^4-z^{10})}{(1-z^6)(1-z)}$$
$$= \frac{z(1-z^7)}{(1-z^2)(1-z^5)}+\frac{z^2(1-z^7)}{(1-z^4)(1-z^3)}+\frac{z^3(1-z^7)}{(1-z^6)(1-z)} = 0.$$

Até 10 pontos

08. São dados no plano dois pontos, A e B, tais que AB = 4cm. Identifique o lugar geométrico dos pontos P desse plano, tais que $AP = 2BP$.

Assunto: geometria analítica
Solução
Analisemos o problema com os métodos da geometria analítica; escolha para origem O o ponto médio de AB, para eixo das abscissas a reta suporte de AB, orientada de A para B, e para eixo das ordenadas a mediatriz do segmento AB, orientada de baixo para cima. Desse modo, temos $A(-2,0)$, $B(2, 0)$; por outro lado, se $P(x, y)$, então,

$$AP = 2BP \Leftrightarrow AP^2 = 4BP^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 4[(x-2)^2 + y^2]$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4(x^2 - 4x + 4 + y^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x = -4 \Leftrightarrow \left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2.$$

Logo, o LG procurado é a circunferência de raio 8/3, centrada no ponto de coordenadas (10/3,0), relativamente à escolha de eixos feita acima.

Até 10 pontos