Matemática - Grupos I e J – Gabarito

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

A comissão recebida mensalmente por um vendedor é igual a 10% de seu salário-base. Em determinado mês, foram acrescidos R$ 120,00 à comissão do vendedor. Dessa forma, o valor total da comissão passou a ser igual a 25% de seu salário-base.

Determine, a partir das informações, o salário-base desse vendedor.

Cálculos e respostas:

Sejam S_b o salário-base do vendedor, C_1 a comissão inicial e C_2 a comissão após o acréscimo.

Assim,

$$C_1 = \frac{10}{100} S_b; \quad C_2 = C_1 + 120$$

e

$$C_2 = \frac{25}{100} S_b$$

Logo,

$$\frac{10}{100} S_b + 120 = \frac{25}{100} S_b \iff \frac{15}{100} S_b = 120$$

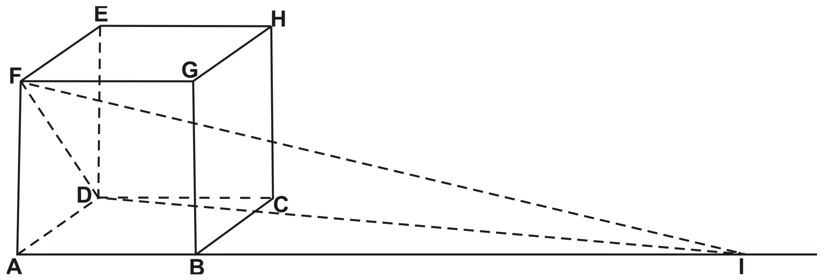
$$\iff S_b = \frac{120 \times 100}{15} \iff S_b = 800$$

Portanto, o salário-base é igual a R$ 800,00.

Matemática - Grupos I e J – Gabarito

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)   Avaliador [ ]   Revisor [ ]

Considere **ABCDEFGH** um cubo cuja aresta mede 1 cm e **I** um ponto no prolongamento da aresta **AB**, de tal modo que o volume do tetraedro **ADFI** tenha o mesmo volume do cubo **ABCDEFGH**.



Determine a medida do segmento **BI**.

Cálculos e respostas:

Volume do cubo = 1 cm^3

Volume do tetraedro = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(1+\overline{BI}\right)$

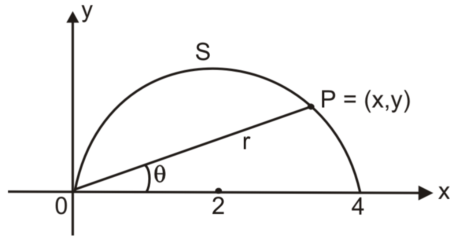
Assim,

$$\frac{1}{6}\left(1+\overline{BI}\right) = 1 \Leftrightarrow \overline{BI} = 5cm$$

Matemática - Grupos I e J – Gabarito

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Seja P = (x , y) um ponto da semicircunferência S, conforme representado na figura abaixo.



Considere r a distância do ponto P = (x, y) à origem O = (0,0); isto é, $\overline{OP} = r$. Seja θ o ângulo formado pelo segmento de reta OP e o eixo x.

Determine:

a) uma equação de S;

b) a expressão de r, em função, apenas, do ângulo θ ;

c) as coordenadas x e y do ponto da semicircunferência S, que dista $2\sqrt{3}$ unidades da origem.

Cálculos e respostas:

a) $(x - 2)^2 + y^2 = 4 \quad ; \quad y \geq 0 \quad$ ou $\quad y = \sqrt{4-(x-2)^2} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 4$

b) consideremos

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Assim, $(x - 2)^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad (r\cos\theta - 2)^2 + (r\,\text{sen}\,\theta)^2 = 4$

$\Rightarrow r^2 - 4r\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 4\cos\theta \quad$ com $\quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

c) Temos, $r = 2\sqrt{3}$

Assim, $2\sqrt{3} = 4\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$ rad

Portanto, $\begin{cases} x = r\cos\theta \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{3}\,.\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3 \quad \text{e} \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad y = 2\sqrt{3}\,.\,\dfrac{1}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$

Matemática - Grupos I e J – Gabarito

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 1$.

a) Encontre, em $\mathbb{C}$, todas as raízes do polinômio p(x).

b) Calcule a área do polígono cujos vértices são os pontos que representam as raízes do polinômio p(x), no plano complexo.

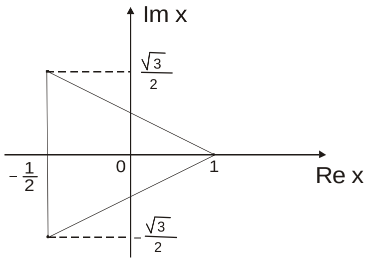
c) Sejam z_1 e z_2 as raízes complexas, não reais, do polinômio p(x). Determine o valor de $(z_1^{3000} + \overline{z}_2^{3000})$.

Cálculos e respostas:

a) $x^3 - 1 = 0 \iff (x-1)(x^2+x+1) = 0 \iff x = 1$ ou $x^2 + x + 1 = 0 \iff$

$x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ou $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

b)



O triângulo formado é equilátero de lado = $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$

Logo, a área é $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

c) Z_1 é raiz $\Rightarrow Z_1^3 = 1$

Z_2 é raiz $\Rightarrow \overline{Z_2}$ é raiz $\Rightarrow \left(\overline{Z_2}\right)^3 = 1$

$\Rightarrow Z_1^{3000} + \left(\overline{Z_2}\right)^{3000} = 1 + 1 = 2$

Matemática - Grupos I e J – Gabarito

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos) Avaliador Revisor

Na produção de determinado produto, usa-se uma quantidade x de matéria-prima para produzir y unidades, sendo z o custo final.
As variáveis x, y e z satisfazem as seguintes relações:

$$z^2 = y + 4 \qquad \text{e} \qquad y^2 - 4y + 4 = x$$

sendo $x \geq 4$.

a) Determine o valor de z, quando $x = 100$.

b) Determine uma expressão para z, em função, apenas, de x ($x \geq 4$).

Cálculos e respostas:

a) $y^2 - 4y + 4 = x \iff y^2 - 4y + 4 = 100 \iff (y-2)^2 = 100 \iff y - 2 = \pm 10$

$\iff y = 12$ ou $y = -8$

Como y é quantidade, escolhemos $y = 12$.

Também, $z^2 = y + 4 = 16 \Rightarrow z = \pm 4 \Rightarrow z = 4$

b) $(y^2 - 4y + 4) = x \iff (y-2)^2 = x \iff y = 2 \pm \sqrt{x}$

Como $x \geq 4$ e y é positivo,

$y = 2 + \sqrt{x}$

Também, $z^2 = y + 4 \Rightarrow z^2 = 6 + \sqrt{x} \Rightarrow z = \pm\sqrt{6+\sqrt{x}}$

Como $z > 0$, $z = \sqrt{6+\sqrt{x}}$