

1ª Questão

Um cliente tenta negociar no banco a taxa de juros de um empréstimo pelo prazo de um ano. O gerente diz que é possível baixar a taxa de juros de 40% para 25% ao ano, mas, nesse caso, um valor seria debitado da quantia emprestada, a título de “custo administrativo”.

- A** Que porcentagem do capital emprestado deveria ser o custo administrativo para o banco compensar a redução da taxa de juros neste empréstimo?
- B** Que porcentagem da quantia paga pelo cliente deveria ser o custo administrativo, se este fosse cobrado no final do período do empréstimo?

a) % do Capital emprestado:

$$M = (C - T) \cdot (1,4)$$

$$M = C \cdot 1,25$$

$$\begin{cases} 1,4 \cdot C - 1,4 \cdot T = 1,25 \cdot C \\ T = \frac{0,15 \cdot C}{1,4} \end{cases}$$

$$\% \frac{T}{(C - T)} = \frac{0,15 \cdot C / 1,4}{1,25 \cdot C / 1,4} = \frac{0,15}{1,25} = 12\%$$

b) custo adm. (% da quantia paga pelo cliente no fim do período)

$$\frac{1,25 \cdot T}{1,25 \cdot (C + T)} = \frac{T}{C + T} = \frac{0,12 \cdot C}{(C + 0,12 \cdot C)} = 10,7\%$$

2ª Questão

Determine as coordenadas do ponto (x,y), eqüidistante dos pontos (0,0) , (3,2) e (2,5).

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

recaindo no sistema:

$$\begin{cases} 6.x + 4.y = 13 \\ 4.x + 10.y = 29 \end{cases} \quad x = \frac{7}{22} \quad \text{e} \quad y = \frac{61}{22}$$

3ª Questão

João deseja adquirir um telefone celular. Dois planos lhe são oferecidos:

I. Plano alfa: Se o consumo não ultrapassar 100 minutos, o preço por minuto será de R\$0,70. Se o consumo ultrapassar 100, mas não for maior que 400 minutos, o preço por minuto terá um desconto de R\$0,001 (um milésimo de real) multiplicado pelo número de minutos que exceder o consumo de 100 minutos. Se o consumo ultrapassar 400 minutos, o preço por minuto será de R\$0,40.

II. Plano beta: Há um preço fixo de R\$50,00, com o direito de uso de 87 minutos (franquia) de ligação, e o minuto excedente custará R\$0,80.

Para quantos minutos de ligação o plano beta é o mais vantajoso?

$$C(t)_{\text{alfa}} = \begin{cases} 0,7 \cdot t & t \leq 100 \\ (0,7 - 0,001 \cdot (t - 100)) \cdot t & 100 < t \leq 400 \\ 0,4 \cdot t & t > 400 \end{cases}$$

$$C(t)_{\text{beta}} = \begin{cases} 50 & t \leq 87 \\ 50 + 0,8 \cdot (t - 87) & t > 87 \end{cases}$$

para $t < 87$ teremos

$$C(t)_{\text{alfa}} > C(t)_{\text{beta}} \Rightarrow 0,7 \cdot t > 50 \Rightarrow t > 71,4$$

plano beta é mais vantajoso que o alfa para $71,4 < t \leq 87$

$$C(t)_{\text{alfa}} > C(t)_{\text{beta}}$$

para $87 < t \leq 100$ teremos

$$0,7 \cdot t > 50 + 0,8 \cdot (t - 87) \Rightarrow t < 196$$

plano beta é o mais vantajoso em $87 < t \leq 100$

$$C(t)_{\text{alfa}} > C(t)_{\text{beta}}$$

para $100 < t \leq 400$

$$50 + 0,8 \cdot (t - 87) < (0,7 - 0,001 \cdot (t - 100)) \cdot t \Rightarrow t < 140$$

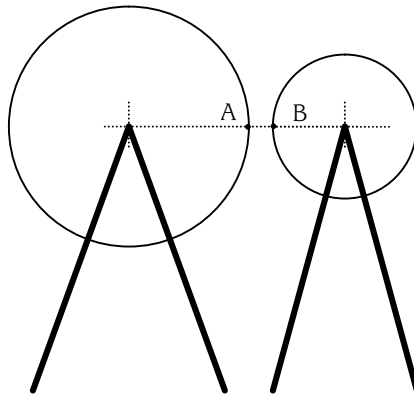
plano beta é o mais vantajoso em $100 < t \leq 140$

Portanto, o plano beta é o mais vantajoso para $71,4 < t \leq 140$

4ª Questão

Duas rodas gigantes dispostas uma de frente para a outra, conforme a figura abaixo, têm raios que medem, respectivamente, 20 m e 10 m. A maior gira $0,2p$ rotações por minuto (rpm) e a menor, $0,35p$ rpm.

Se as duas começam a se mover no mesmo instante, qual o menor tempo necessário para que os pontos A e B, mostrados abaixo, voltem a ficar nessa mesma posição inicial?



$$0,2p \rightarrow 1$$

$$n_A \rightarrow t_A$$

$$t_A = \frac{n_A}{0,2p}$$

$$t_A = t_B$$

$$0,35p \rightarrow 1$$

$$n_B \rightarrow t_b$$

$$t_B = \frac{n_B}{0,35p}$$

$$\frac{n_A}{0,2p} = \frac{n_B}{0,35p} \Rightarrow \frac{n_A}{n_B} = \frac{0,2p}{0,35p} = \frac{4}{7}$$

$$t_A = t_B = \frac{4}{0,2p} = \frac{20}{p} \text{ minutos}$$

5ª Questão

Uma caixa aberta, em forma de cubo com 20 cm de aresta, está cheia de esferas de 1 cm de diâmetro. Estime quantas esferas contém essa caixa.

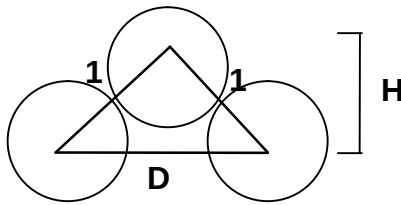
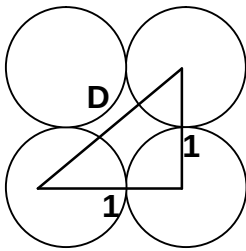
Estimando o máximo número de esferas:

$$E_{\max} = \frac{20^3}{4p \cdot (0,5)^3 / 3} = \frac{3.8000}{4p/8} = \frac{48000}{p} \cong 15200$$

Estimando o mínimo número de esferas:

$$E_{\min} = \frac{20^3}{1^3} = 8000$$

Estimando a partir de uma acomodação das esferas



$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$d = \sqrt{2}$$

$$1^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + h^2 \quad h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,7$$

número inteiro de camadas: $= (20 - 0,5 - 0,5) / 0,7 = 27$

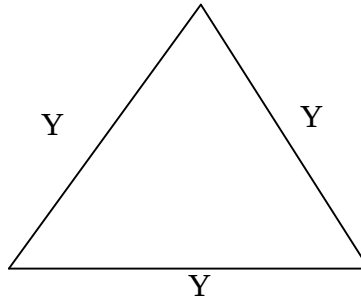
teremos 14 camadas de $20 \times 20 = 14 \cdot 20^2 = 5600$

e 13 camadas de $19 \times 19 = 13 \cdot 19^2 = 4693$

$$E_{\text{acom.}} = 5600 + 4693 = 10293$$

6ª Questão

Um fio de 10 metros é cortado em dois pedaços, de forma que o primeiro defina o perímetro de um quadrado e o segundo, de um triângulo eqüilátero. Determine o tamanho de cada um dos pedaços, de modo que a área do quadrado seja igual à área do triângulo multiplicada por $\sqrt{3} = 1,73$.



$$4 \cdot x + 3 \cdot y = 10$$

$$y^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow h = \frac{y \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = \frac{y \cdot h}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$x = \frac{y \cdot \sqrt{3}}{2} \therefore 4 \cdot \frac{y \cdot \sqrt{3}}{2} + 3 \cdot y = 10$$

$$y = \frac{10}{(2 \cdot 1,73 + 3)}$$

Portanto, o perímetro do triângulo é igual a:

$$3 \cdot y = 3 \cdot \frac{10}{2 \cdot 1,73 + 3} = 4,6$$

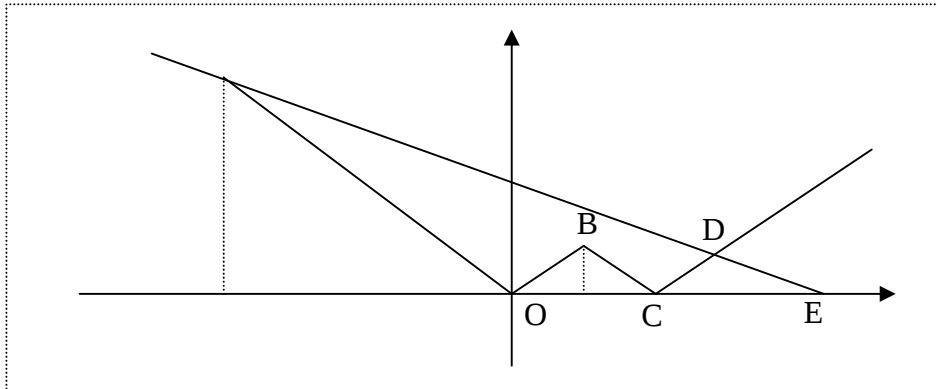
e o perímetro do quadrado é igual a:

$$4 \cdot x = 10 - 4,6 = 5,4$$

7ª Questão

Determine a área da região limitada pelas curvas:

$$f(x) = ||x-1|-1| \quad \text{e} \quad g(x) = 2 - \frac{x}{2}$$



$$\text{ponto A} \begin{cases} y = -x \\ y = 2 - \frac{x}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} x = -4 \\ y = 4 \end{matrix}$$

$$\text{Triang OAE} \quad A_1 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

$$\text{Triang CDE} \quad A_3 = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{4}{6}$$

$$\text{ponto B} \begin{cases} y = x - 2 \\ y = 2 - \frac{2}{x} \end{cases} \quad \begin{matrix} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{matrix}$$

$$\text{Triang OBC} \quad A_2 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

$$A = \frac{4 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{16 - 2 - \frac{4}{3}}{2} = \frac{38}{6} = \frac{19}{3}$$

8ª Questão

Um jogador aposta sempre o mesmo valor de \$1 numa jogada cuja chance de ganhar ou perder é a mesma. Se perder, perderá o valor apostado, se ganhar, receberá \$1 além do valor apostado. Se ele começa o jogo com \$3 no bolso, joga três vezes e sai, com que valor é mais provável que ele saia?

$$P(6) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(5) = 0$$

$$P(4) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$P(3) = 0$$

resposta: 0 e 4

$$P(2) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$P(1) = 0$$

$$P(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

9ª Questão

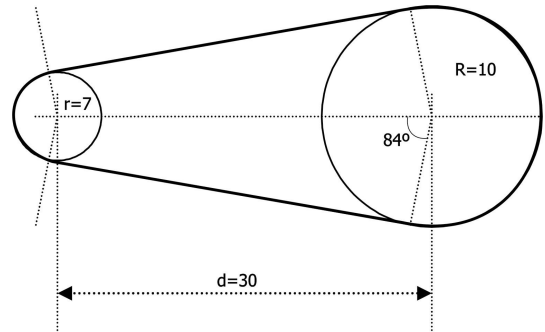
Abaixo está representado um sistema de transmissão, composto por duas polias e uma correia. As dimensões são mostradas na figura:

A Determine o comprimento da correia.

Dados: $\sqrt{33} = 5,74$

$\sqrt{27} = 5,2$

B Sabendo que a polia menor faz 500 rotações por minutos e que traciona a polia maior, determine com quantas rotações por minuto a polia maior irá girar.



RESOLUÇÃO A

$$P_1^2 = (30^2 - 3^2) \Rightarrow P_1^2 = 33.27 = P_1 = 5,74.5,2 = 29,85$$

$$P_2 = \frac{2.84}{360} \cdot 2p \cdot 7 \cong 20,5$$

$$P_3 \frac{(360 - 2.84)}{360} \cdot 2p \cdot 10 = 10,67p \cong 33,5$$

$$P = 2.29,48 + 20,5 + 33,5 = 112,9$$

RESOLUÇÃO B

$$V_1 = V_2$$

$$2p \cdot 7.500 = 2p \cdot 10 \cdot X$$

$$X = \frac{2p \cdot 7.500}{2p \cdot 10} = 350rpm$$

10ª Questão

Numa fila de oito pessoas, três pretendem votar no candidato A e cinco, no candidato B.

- A** Ao entrevistar as três primeiras pessoas da fila, qual a probabilidade de o resultado desta amostra ser favorável ao candidato A?
- B** Qual a probabilidade de dar empate, se as quatro primeiras pessoas forem entrevistadas nessa mesma fila?

RESOLUÇÃO A

$$P(3) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$$

$$P(2) = 3 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{15}{56}$$

$$P(A) = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} = \frac{16}{56} = \frac{2}{7}$$

RESOLUÇÃO B

O número de seqüências onde temos 2 A e 2 B é:

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \quad P(EMPATE) = 6 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$$