Questão 1

Se Amélia der R\$ 3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R\$ 6,00 a mais do que Amélia. Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria.
Quanto possui cada uma das meninas Amélia, Lúcia e Maria?

Resposta

Sejam x, y e z as quantidades de reais que possuem, respectivamente, Amélia, Lúcia e Maria. Então, das condições dadas:

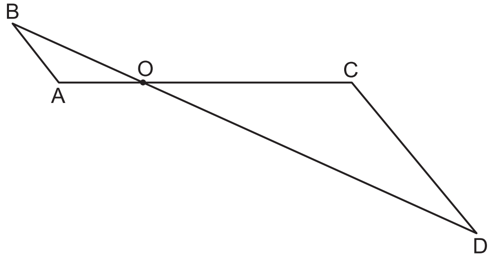
$$\begin{cases} x - 3 = y + 3 \\ \frac{1}{3} \cdot z + y = x + 6 \\ x - \frac{1}{2} \cdot x = \frac{1}{3} \cdot z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 6 \\ \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}x\right) + x - 6 = x + 6 \\ z = \frac{3}{2} \cdot x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 18 \\ z = 36 \end{cases}$$

Portanto Amélia, Lúcia e Maria possuem, respectivamente, R\$ 24,00, R\$ 18,00 e R\$ 36,00.

Questão 2

Na figura abaixo, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, o ângulo $O\hat{A}B$ mede 120^o, AO = 3 e AB = 2. Sabendo-se ainda que a área do triângulo OCD vale $600\sqrt{3}$,



a) calcule a área do triângulo OAB.
b) determine OC e CD.

Resposta

a) A área do triângulo OAB é $\frac{AB \cdot AO \cdot sen\, O\hat{A}B}{2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot sen\, 120^o}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b) Supondo que O pertença a $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$, *como* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *são paralelos, pelo caso AA os triângulos OAB e OCD são semelhantes.*

Sendo $k = \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$ *a razão de semelhança, a razão entre as áreas de OAB e OCD é* $k^2 = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{600\sqrt{3}} = \frac{1}{400}$, *de onde obtemos* $k = \frac{1}{20}$.

Logo $\frac{1}{20} = \frac{3}{OC} = \frac{2}{CD} \Leftrightarrow OC = 60$ *e* $CD = 40$.

Questão 3

Em uma progressão aritmética $a_1, a_2, ..., a_n$, ... a soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = bn^2 + n$, sendo b um número real. Sabendo-se que $a_3 = 7$, determine

a) o valor de b e a razão da progressão aritmética.

b) o 20º termo da progressão.

c) a soma dos 20 primeiros termos da progressão.

Resposta

Para $n \geq 2$, *temos:*

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_n = S_n - S_{n-1} = bn^2 + n - (b(n-1)^2 + n - 1) =$
$= 2bn - b + 1$

a) Sendo $a_3 = 7$, $2b \cdot 3 - b + 1 = 7 \Leftrightarrow b = \frac{6}{5}$.

A razão da progressão aritmética é $a_n - a_{n-1} =$
$= 2bn - b + 1 - (2b(n-1) - b + 1) = 2b =$
$= 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5}$.

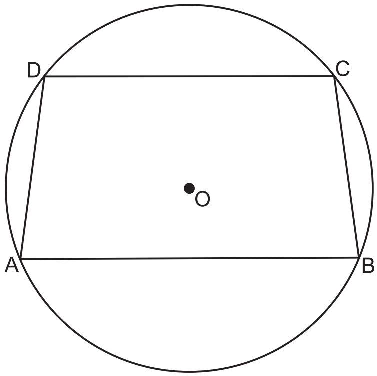
b) O 20º termo da progressão aritmética é:

$a_{20} = 2 \cdot \frac{6}{5} \cdot 20 - \frac{6}{5} + 1 = \frac{239}{5}$

c) A soma dos 20 primeiros termos da progressão aritmética é $S_{20} = \frac{6}{5} \cdot 20^2 + 20 = 500.$

Questão 4

A figura representa um trapézio ABCD de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, inscrito em uma circunferência cujo centro O está no interior do trapézio. Sabe-se que AB = 4, CD = 2 e AC = $3\sqrt{2}$.



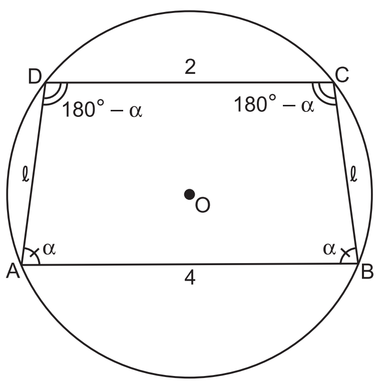
a) Determine a altura do trapézio.

b) Calcule o raio da circunferência na qual ele está inscrito.

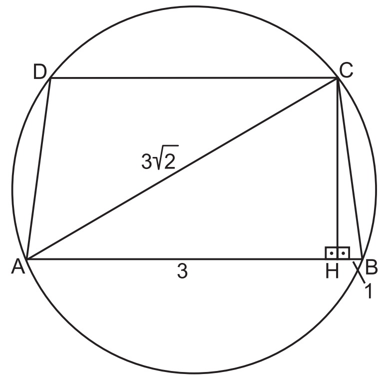
c) Calcule a área da região exterior ao trapézio e delimitada pela circunferência.

Resposta

Observe a figura:



Como o trapézio é inscritível, se $m(\hat{A}) = \alpha$, *então* $m(\hat{C}) = 180^o - \alpha$. *Além disso,* $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ *e, portanto,* $m(\hat{B}) = \alpha$ *e* $m(\hat{D}) = 180^o - \alpha$. *Logo, o trapézio ABCD é isósceles de lados não paralelos medindo* ℓ.



a) Temos $BH = \frac{AB - CD}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$. *Logo,* $AH = 4 - 1 = 3$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao ΔAHC, $HC^2 = (3\sqrt{2})^2 - 3^2 \Leftrightarrow HC = 3$.

b) No ΔAHC, $tg\,(C\hat{A}H) = \frac{3}{3} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m(C\hat{A}H) = 45^o$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao ΔBCH, *temos* $BC^2 = 1^2 + 3^2 \Leftrightarrow BC = \sqrt{10}$.

Sendo R o raio da circunferência, aplicando a lei dos senos ao ΔABC:

$$\frac{BC}{\text{sen } 45^o} = 2R \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Leftrightarrow R = \sqrt{5}$$

c) A área pedida é a diferença entre a área do círculo de raio $R = \sqrt{5}$ *e a área do trapézio ABCD, isto é:*

$$\pi(\sqrt{5})^2 - \frac{(4+2) \cdot 3}{2} = 5\pi - 9$$

Questão 5

Um arco x está no terceiro quadrante do círculo trigonométrico e verifica a equação $5\cos 2x + 3\operatorname{sen} x = 4$.

Determine os valores de sen x e cos x.

Resposta

$5 \cdot \cos 2x + 3 \cdot \text{sen } x = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(1 - 2 \cdot \text{sen}^2 x) + 3 \cdot \text{sen } x = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 \cdot sen^2 x - 3 \cdot sen\, x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sen\, x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sen\, x = \dfrac{1}{2}$ ou $sen\, x = -\dfrac{1}{5}$.

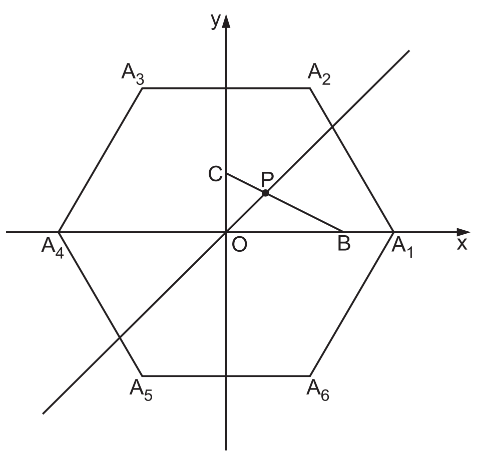
Como x é um ângulo do terceiro quadrante, $sen\, x < 0$ e $cos\, x < 0$. Assim, $sen\, x = -\dfrac{1}{5}$ e

$cos\, x = -\sqrt{1 - sen^2 x} \Leftrightarrow cos\, x = -\sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2} =$

$= -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

Questão 6

Na figura abaixo, os pontos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 são vértices de um hexágono regular de lado 3 com centro na origem O de um sistema de coordenadas no plano. Os vértices A_1 e A_4 pertencem ao eixo x. São dados também os pontos $B = (2, 0)$ e $C = (0, 1)$.



Considere a reta que passa pela origem O e intersecta o segmento $\overline{BC}$ no ponto P, de modo que os triângulos OPB e OPC tenham a mesma área. Nessas condições, determine

a) a equação da reta $\overleftrightarrow{OP}$.

b) os pontos de interseção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com o hexágono.

Resposta

a) Sendo $P = (a, b)$ e os triângulos OPB e OPC de mesma área, podemos escrever $\dfrac{OB \cdot a}{2} =$

$= \dfrac{OC \cdot b}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2 \cdot a}{2} = \dfrac{1 \cdot b}{2} \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2}$.

Assim uma equação da reta $\overleftrightarrow{OP}$ de coeficiente angular $\dfrac{1}{2}$ é $y - 0 = \dfrac{1}{2}(x - 0) \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{2}$.

b) Sendo 3 a medida do raio do círculo que circunscreve o hexágono regular, $A_1 = (3, 0)$ e uma equação da reta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ é $y - 0 = tg\, 120^o \cdot (x - 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\sqrt{3}(x - 3) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$.

A intersecção D de $\overleftrightarrow{OP}$ e $\overline{A_1A_2}$ é obtida resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{36 - 6\sqrt{3}}{11} \\ y = \dfrac{18 - 3\sqrt{3}}{11} \end{cases}$$

$$D = \left(\dfrac{36 - 6\sqrt{3}}{11}, \dfrac{18 - 3\sqrt{3}}{11}\right)$$

O outro ponto de intersecção de $\overleftrightarrow{OP}$ com o hexágono, $E \in \overline{A_4A_5}$, simétrico de D em relação à origem, tem coordenadas opostas às de D, ou seja:

$$E = \left(\dfrac{6\sqrt{3} - 36}{11}, \dfrac{3\sqrt{3} - 18}{11}\right)$$

Questão 7

Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 bolas pretas. Três bolas são retiradas ao acaso, sucessivamente, sem reposição. Determine

a) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca.

b) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca, sabendo-se que as três bolas retiradas não são da mesma cor.

Resposta

a) A probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda e a terceira, pretas é $\dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{56}$.

Como a bola branca pode ser também a segunda ou a terceira, a probabilidade pedida é $3 \cdot \dfrac{5}{56} = \dfrac{15}{56}$.

b) Sabendo que as três bolas não são da mesma cor, podem ter saído duas bolas pretas e uma branca ou duas bolas brancas e uma preta. A probabilidade de sair duas bolas pretas e uma branca é $\frac{15}{56}$ e, através de um raciocínio análogo, temos que a probabilidade de sair duas bolas brancas e uma preta é $3 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{15}{28}$. Ou seja, a probabilidade de que as três bolas não sejam da mesma cor é $\frac{15}{56} + \frac{15}{28} = \frac{45}{56}$.

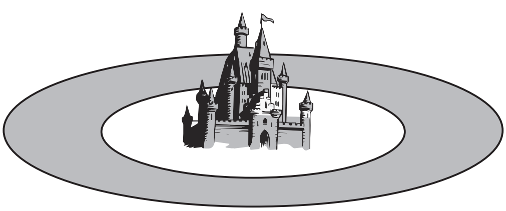
Logo, considerando os eventos:

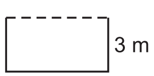
- *A: são retiradas duas bolas pretas e uma branca;*
- *B: as três bolas retiradas não são da mesma cor, $A \subset B$ e $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{45}{56}} =$*

$= \frac{1}{3}$.

Questão 8

Um castelo está cercado por uma vala cujas bordas são dois círculos concêntricos de raios 41 m e 45 m. A profundidade da vala é <u>constante</u> e igual a 3 m.





Seção transversal da vala

O proprietário decidiu enchê-la com água e, para este fim, contratou caminhões-pipa, cujos reservatórios são cilindros circulares retos com raio da base de 1,5 m e altura igual a 8 m.

Determine o número mínimo de caminhões-pipa necessário para encher completamente a vala.

Resposta

O volume da vala é igual à área da coroa circular de raios 41 m e 45 m multiplicada pela profundidade, ou seja, $\pi(45^2 - 41^2) \cdot 3 =$

$= \pi(45 - 41) \cdot (45 + 41) \cdot 3 = \pi \cdot 4 \cdot 86 \cdot 3 \text{ m}^3$.

O volume de cada caminhão-pipa é $\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 8 \text{ m}^3$.

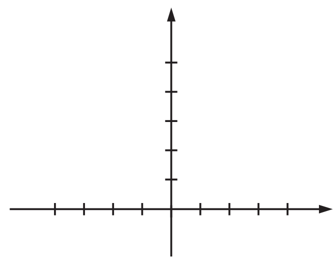
Assim, o número mínimo de caminhões-pipa necessário é o menor inteiro n tal que:

$$\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 8n \ge \pi \cdot 4 \cdot 86 \cdot 3 \Leftrightarrow n \ge \frac{172}{3} = 57 + \frac{1}{3}$$

Logo n = 58.

Questão 9

a) Represente, no sistema de coordenadas desenhado a seguir, os gráficos das funções $f(x) = |4 - x^2|$ e $g(x) = \frac{x + 7}{2}$.

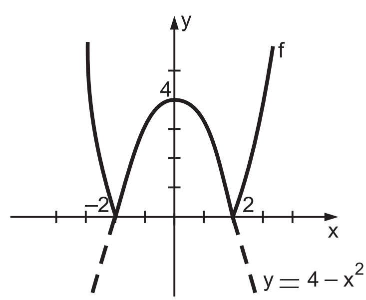


b) Resolva a inequação $|4 - x^2| \le \frac{x + 7}{2}$.

Resposta

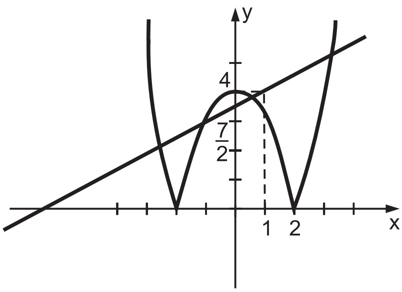
Nesse problema, vamos supor que f e g são funções de R em R.

a) O gráfico de $f(x) = |4 - x^2|$ é obtido refletindo a parte do gráfico de $y = 4 - x^2$ abaixo do eixo x em relação a esse eixo:



Adicionando o gráfico de $g(x) = \frac{x + 7}{2}$, que é a reta que passa por $(0; g(0)) = \left(0; \frac{7}{2}\right)$ e $(1; g(1)) =$

$= (1; 4)$, obtemos:



b) $|4 - x^2| \le \frac{x+7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{x+7}{2} \le 4 - x^2 \le \frac{x+7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 7 \le 8 - 2x^2 \\ 8 - 2x^2 \le x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 15 \le 0 \\ 2x^2 + x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

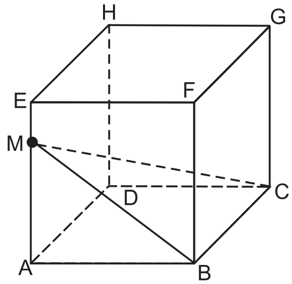
$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2} \le x \le 3 \\ x \le -1 \text{ ou } x \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \le x \le -1$ ou $\frac{1}{2} \le x \le 3$

$V = \left[-\frac{5}{2}; -1\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 3\right]$

Questão 10

O cubo ABCDEFGH possui arestas de comprimento a. O ponto M está na aresta $\overline{AE}$ e $AM = 3 \cdot ME$. Calcule:



a) O volume do tetraedro BCGM.
b) A área do triângulo BCM.
c) A distância do ponto B à reta suporte do segmento $\overline{CM}$.

Resposta

a) Considerando o triângulo retângulo BCG, cuja área é $\frac{a^2}{2}$, como base do tetraedro e a distância de M ao plano que contém os pontos B, C e G como sua altura, cuja medida é igual à aresta do cubo, temos que o volume do tetraedro BCGM é $\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}$.

b) Como a aresta $\overline{BC}$ é perpendicular à face ABFE e $\overline{BM}$ está contido na face ABFE, podemos afirmar que $\overline{BC}$ é perpendicular a $\overline{BM}$. Logo o triângulo CBM é retângulo em B e, sendo $AM = \frac{3a}{4}$ e $ME = \frac{a}{4}$, sua área é $\frac{BC \cdot BM}{2} =$

$$= \frac{a \cdot \sqrt{a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2}}{2} = \frac{5a^2}{8}.$$

c) Já que $m(C\hat{B}M) = 90^o$, no triângulo CBM temos $(CM)^2 = (BC)^2 + (BM)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (CM)^2 = a^2 + \left(\frac{5a}{4}\right)^2 \Leftrightarrow CM = \frac{a\sqrt{41}}{4}.$$

Pelas relações métricas no triângulo retângulo, se h é a distância de B à reta suporte de $\overline{MC}$, temos

$$BC \cdot BM = CM \cdot h \Leftrightarrow a \cdot \frac{5a}{4} = \frac{a\sqrt{41}}{4} \cdot h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{5\sqrt{41}a}{41}.$$

Matemática – questões mais acessíveis

Itens iniciais mais simples e que preparam para os itens finais foram uma ótima estratégia para encorajar os candidatos a enfrentarem mesmo as questões mais desafiantes. Esse recurso, que a UNICAMP costuma usar tão bem, foi o grande aliado da FUVEST na confecção de uma prova que provavelmente permitirá uma melhor seleção dos candidatos.
No restante, vimos a FUVEST de sempre: predomínio de Geometria, acarretando a ausência de temas importantes, como Teoria das Equações, Números Complexos e Matrizes/Determinantes. Considerando que são apenas os candidatos das carreiras nas quais o instrumental matemático é fundamental que fazem tal prova, é algo a se lamentar.