RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 1

a)
Um quilograma de pãezinhos corresponde a 1000/50 = 20 unidades. Assim, o preço do quilograma de pãezinhos era igual a 0,20 x 20 = R$ 4,00. A diferença entre o preço novo e o antigo é de 4,50 – 4,00 = R$ 0,50 / kg, o que corresponde a um aumento de 0,50/4,00 = 0,125, ou 12,5%.
Resposta: houve uma variação de 12,5% no preço do pãozinho.

a')
Um quilograma de pãezinhos corresponde a 1000/50 = 20 unidades. Assim, o preço atual do pãozinho equivale a R$ 4,50/20 = R$ 0,225. Por pão, a diferença entre o preço novo e o antigo é de 0,225 – 0,20 = R$ 0,025, o que corresponde a um aumento de 0,025/0,20 = 0,125, ou 12,5%.
Resposta: houve uma variação de 12,5% no preço do pãozinho.

b)
O consumidor comprou 14/20 = 0,7 kg de pãezinhos. Assim, ele gastou 0,7 x 4,5 = R$ 3,15.
Resposta: o consumidor gastou R$ 3,15.

Questão 2

a)
A distância real entre as cidades é de 47 – 13 = 34 km. No mapa, as cidades estão a 8 cm de distância. Assim, cada centímetro do mapa corresponde a 34/8 km, ou 4,25 km reais. Logo, a escala é 1:425.000.
Resposta: A escala é 1:425.000.

b)
No mapa, o posto está a 5 cm de Paraguaçu. A distância real é de 5 x 4,25 = 21,25 km. Logo, o posto está a 21,25 + 13 = 34,25 km do início da estrada.
Resposta: o posto está no quilômetro 34 da estrada.

c)
Na escala 1:500.000, as cidades serão desenhadas a 3400000/500000 = 34/5 = 6,8 cm.
Resposta: as cidades serão desenhadas a uma distância de 6,8 cm.

Questão 3

a)
A espessura dobra a cada dobra do papel. Como a espessura inicial é de 0.1 mm, teremos $e_k = 0,1 \times 2^k$.
Resposta: o termo geral da progressão é descrito por $e_k = 0,1 \times 2^k$.

b)
Após a sexta dobra a espessura será igual a $e_6 = 0,1 \times 2^6 = 0,1 \times 64 = 6,4$ mm. Cada uma das demais dimensões será dividida por $2^3 = 8$, de modo que teremos 210 / 8 = 26,25 mm e 297 / 8 = 37,125 mm.
Resposta: as dimensões serão: 37,125 mm, 26,25 mm e 6,4 mm.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 4

a)
A abertura superior tem área igual a $\pi.(20/2)^2 = 100\pi$ cm². A área da base do tubo é 1/10 da área dessa abertura, ou seja, 10π cm². Assim, o volume do tubo é igual a $60 \times 10\pi = 600\pi$ cm³.
Resposta: o tubo tem 600π cm³.

b)
O volume recolhido no tubo é igual a $2 \times 10\pi = 20\pi$ cm³. O terreno tem $500 \times 300 = 150000$ m² $= 15.10^8$ cm². Se, em uma área de 100π cm², o volume precipitado foi de 20π cm³, o volume precipitado sobre o terreno foi de $(20\pi / 100\pi) \times 15.10^8 = 3.10^8$ cm³ = 300 m³.
Resposta: ocorreu uma precipitação de 300 m³ de chuva sobre o terreno.

Questão 5

a)
Se o preço subir para R$ 18,00 / kg, o que corresponde a um aumento de R$ 3,00 / kg, o consumo de comida baixará para 100 – 3 x 5 = 85 kg. Nesse caso, o restaurante terá uma receita de 18 x 85 = R$ 1530,00. Se o preço chegar aos R$ 20,00 / kg, ou seja, se o aumento for de R$ 5,00 / kg, o consumo descerá para 100 – 5 x 5 = 75 kg. Neste caso, a receita será de 20 x 75 = R$ 1500,00.
Resposta: a receita será maior se o preço subir para R$ 18,00 o quilograma.

b)
A receita é igual ao produto do preço pela quantidade de comida vendida, ou seja, $f(x) = (15 + x)(100 - 5x) = 1500 + 25x - 5x^2$.
Resposta: $f(x) = (15 + x)(100 - 5x)$ ou $f(x) = 1500 + 25x - 5x^2$.

c)
Os zeros de f(x) são $x = -15$ e $x = 100/5 = 20$. Como f(x) é uma função quadrática com a concavidade voltada para baixo, seu valor máximo ocorre quando $x = [-15 + 20] / 2 = 2,5$. Assim, a receita será máxima quando o quilo de comida custar 15 + 2,50 = R$ 17,50.
Resposta: a maior receita será obtida com um preço de R$ 17,50 por quilograma de comida.

c')
Como $f(x) = 1500 + 25x - 5x^2$ é uma função quadrática com a concavidade voltada para baixo, seu valor máximo ocorre quando $x = -25 / [2.(-5)] = 2,5$. Assim, a receita será máxima quando o quilo de comida custar 15 + 2,5 = R$ 17,50.
Resposta: a maior receita será obtida com um preço de R$ 17,50 por quilograma de comida.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 6

a) O número de maneiras diferentes é dado por $C_{10}^{2} = \binom{10}{2} = \dfrac{10!}{2!(10-2)!} = \dfrac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{2.1.8.7.6.5.4.3.2.1} = 45$.

Resposta: existem 45 maneiras diferentes de distribuir os prêmios.

b) As maneiras diferentes de distribuir os prêmios por dois homens são dadas por $C_{3}^{2} = \binom{3}{2} = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = \dfrac{3.2.1}{2.1.1} = 3$. Deste modo, a probabilidade é de 3/45 ou 1/15, o que corresponde a, aproximadamente, 6,67%.
Resposta: A probabilidade é igual a 1/15, ou cerca de 6,67%.

b')
A probabilidade de que o primeiro prêmio seja dado a um homem é de (3/10). A probabilidade de que o segundo prêmio saia para um homem é de (2/9). Assim, a probabilidade dos dois prêmios serem dados a homens é de (3/10)x(2/9) = 6/90 = 1/15, o que corresponde a, aproximadamente, 6,67%.
Resposta: A probabilidade é igual a 1/15, ou cerca de 6,67%.

c)
Os únicos casos em que uma mulher não recebe algum prêmio são aqueles nos quais dois homens são beneficiados. Assim, a probabilidade desejada é de 1 – 1/15 = 14/15, ou cerca de 93,33%.
Resposta: A probabilidade é igual a 14/15, ou 93,33%.

c')
Se ao menos uma mulher recebeu um prêmio, podemos ter as seguintes situações: o primeiro prêmio foi para um homem e o segundo para uma mulher, o primeiro prêmio foi para uma mulher e o segundo para um homem e, finalmente, os dois prêmios foram dados a mulheres. Assim, teremos as seguintes probabilidades (7/10)x(3/9) = 7/30, (3/10)x(7/9) = 7/30 e (7/10)x(6/9) = 14/30. Somando esses valores, chegamos a 28/30 = 14/15, ou cerca de 93,33%.
Resposta: A probabilidade é igual a 14/15, ou 93,33%.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 7

a)
Como cos(α) = (a / 2) / b, temos b = a / [2.cos(15º)]. Observa-se, na figura, que os quatro triângulos retângulos pequenos são iguais, tendo, cada um, base com comprimento igual a a/4 e altura igual a c. Então, notando que tg(α) = c / (a / 4), concluímos que c = a.tg(15º) / 4.

cos(15º) = cos(45º – 30º) = cos(45º)cos(30º) + sen(45º)sen(30º) = $(\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2)+(\sqrt{2}/2)(1/2)=(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$.

sen(15º) = sen(45º – 30º) = sen(45º)cos(30º) – cos(45º)sen(30º) = $(\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2)+(\sqrt{2}/2)(1/2)=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$.

tg(15º) = sen(15º) / cos(15º) = $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$. Logo, $b=2a/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ e $c=a(\sqrt{6}-\sqrt{2})/[4(\sqrt{6}+\sqrt{2})]$.

Resposta: $b=2a/(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ **e** $c=a(\sqrt{6}-\sqrt{2})/[4(\sqrt{6}+\sqrt{2})]$**.**

a')
Pela lei dos cossenos, temos $a^2 = b^2 + b^2 - 2.b.b.\cos(150º) = 2b^2\,[1 - \cos(150º)]$. Sabendo que cos(150º) = cos(90º+60º), obtemos cos(150º) = cos(90º)cos(60º) – sen(90º)sen(60º) = $-\sqrt{3}/2$.

Desta forma, $a^2 = 2b^2[1+\sqrt{3}/2]$. Logo, $b^2 = \dfrac{a^2}{2+\sqrt{3}} = a^2(2-\sqrt{3}) = \dfrac{a^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}$. Ou seja, $b=a(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$.

Usando Pitágoras e semelhança de triângulos, escrevemos $(b/2)^2 = (a/4)^2 + c^2$.

Assim, $c^2=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{4}\right)^2=\dfrac{a^2(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{16}-\dfrac{a^2}{16}=a^2\dfrac{(7-4\sqrt{3})}{16}=\dfrac{a^2(2-\sqrt{3})^2}{16}$. Logo, $c=a\left(2-\sqrt{3}\right)/4$.

Resposta: $b=a(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$ **e** $c=a(2-\sqrt{3})/4$**.**

b)
A estrutura tem uma barra de comprimento a, duas barras de comprimento b, duas barras de comprimento (b/2), duas barras de comprimento c e uma barra de comprimento 2c. Assim, o comprimento total será igual a a + 2b + 2(b/2) + 2c +2c, ou a + 3b + 4c. Isso equivale a

$$10+\frac{3.20}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}+\frac{4.10(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=10+\frac{60+10(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{60+20\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

Resposta: O comprimento total é igual a $\dfrac{60+20\sqrt{6}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$ **metros.**

b')
A estrutura tem uma barra de comprimento a, duas barras de comprimento b, duas barras de comprimento (b/2), duas barras de comprimento c e uma barra de comprimento 2c. Assim, o comprimento total valerá a + 2b + 2(b/2) + 2c +2c, ou a + 3b + 4c. Isso equivale a

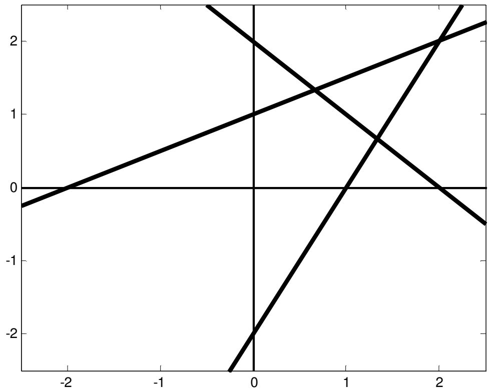
$$a\left[1+\frac{3}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})\right]=\frac{a}{2}\left(6+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=5\left(6+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$$

Resposta: O comprimento total é igual a $5\left(6+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$ **metros.**

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 8

a) **Resposta:** Cada equação pode ser representada por uma reta no plano x_1x_2, como se mostra no gráfico abaixo. Como as três retas não se interceptam em um único ponto, o sistema não tem solução.



b) A partir dos dados do problema, definimos:

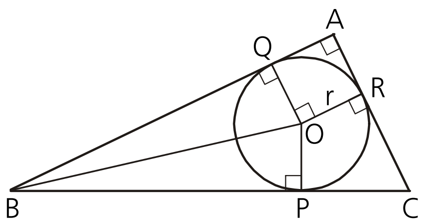
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad A^TA = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A^Tb = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

O sistema $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = 4 \\ -3x_1 + 6x_2 = 4 \end{cases}$ é equivalente a $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = 4 \\ 4{,}5x_2 = 6 \end{cases}$, cuja solução é $x_1 = 4/3$, $x_2 = 4/3$.

Resposta: A solução de quadrados mínimos do sistema é $x_1 = 4/3$, $x_2 = 4/3$.

Questão 9

a)
Sabemos que BP = 10. Observamos, na figura abaixo, que os triângulos retângulos OPB e OQB têm a hipotenusa, OB, em comum. Além disso, os catetos OQ e OP são iguais. Assim, BQ = BP = 10. De forma análoga, como CP = 3, também temos CR = 3. Finalmente, AQ = AR, o que implica que o quadrilátero AQOR é um quadrado de aresta r. Como o triângulo ABC é retângulo, com hipotenusa BC, podemos escrever $(3 + r)^2 + (10 + r)^2 = 13^2$. Logo, $2r^2 + 26r - 60 = 0$, o que implica que r = 2 ou r = –15. Eliminando a raiz negativa, concluímos que r = 2.
Resposta: r = 2.



b)
AB = r + BQ = 2 + 10 = 12. AC = r + CR = 2 + 3 = 5.
Resposta: AB = 12 e AC = 5.

c)
A área solicitada é dada por $A = A_T - A_C$, onde $A_T = AB.AC/2$ é a área do triângulo ABC e $A_C = \pi r^2$ é a área do círculo de raio r. Pelos dados obtidos nos itens (a) e (b), concluímos que $A_T = 12.5/2 = 30$ e $A_C = \pi 2^2 = 4\pi$. Logo, $A = 30 - 4\pi$.
Resposta: A área vale $30 - 4\pi$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 10

a)
Se a meia-vida do estrôncio 90 é de 29 anos, então $P(29) = P_0 / 2 = P_0.2^{-29b}$. Assim, temos $2^{-1} = 2^{-29b}$, ou b = 1/29.
Resposta: b = 1/29.

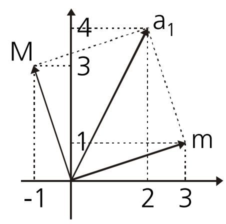
b)
Seja T o tempo necessário para a concentração atingir 20% de P_0. Neste caso, $P(T) = P_0 / 5 = P_0.2^{-T/29}$, ou seja, $1/5 = 2^{-T/29}$. Aplicando o logaritmo na base 2 aos dois lados da equação, obtemos $-\log_2 5 = -T/29$. Assim, $T = 29.\log_2 5 = 29.\log_2 10/2 = 29.(\log_2 10 - 1) \approx 29.2{,}32 = 67{,}28$ anos.
Resposta: são necessários 67,28 anos, aproximadamente.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

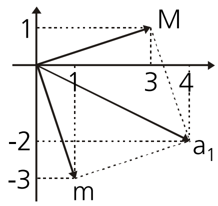
Questão 11

a)
A reta $x - 3y + 6 = 0$ pode ser escrita como $y = x/3 + 2$. O coeficiente angular dessa reta é $m = 1/3$. Este coeficiente angular é igual a $\tan(\alpha)$, sendo α o ângulo formado entre o eixo x e a reta dada. As retas que formam um ângulo de 45º com a reta dada são aquelas que têm coeficientes angulares $a_1 = \tan(\alpha + 45º)$ e $a_2 = \tan(\alpha - 45º)$. Apenas uma reta com coeficiente a_1 passa pelo ponto P, assim como é única a reta de coeficiente a_2 que passa por P.
Resposta: Existem duas retas que formam um ângulo de 45º com a reta dada.

b)
A primeira reta tem coeficiente angular $a_1 = \tan(\alpha + 45°) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(45°)}{1 - \tan(\alpha)\tan(45°)} = \dfrac{\tan(\alpha) + 1}{1 - \tan(\alpha)} = \dfrac{4/3}{2/3} = 2$. Como essa reta passa por P = (2, 5), temos $5 = 2.2 + b_1$, de modo que $b_1 = 1$. Logo, a reta é $y = 2x + 1$. A segunda reta é perpendicular à primeira, tendo, portanto, coeficiente angular igual a $-1/(2) = -1/2$. Como essa reta também passa por P, temos $5 = (-1/2).2 + b_2$, de forma que $b_2 = 6$. Logo, a reta é $y = -x/2 + 6$.
Resposta: As retas são y = 2x + 1 e y = –x/2 + 6.

b')


A figura ao lado mostra o vetor m, que é paralelo à reta dada, e o vetor M, que é perpendicular a m. O vetor a_1, que forma um ângulo de 45º com a m e com M, é paralelo a uma das retas desejadas. Esta reta tem, portanto, coeficiente angular igual a $4/2 = 2$. Como a reta passa por P = (2, 5), temos $(y - 5) = 2.(x - 2)$, ou $y = 2x + 1$. A segunda reta é perpendicular à primeira, tendo, portanto, coeficiente angular igual a $-1/(2) = -1/2$. Como essa reta também passa por P, concluímos que $(y - 5) = (-1/2).(x - 2)$, ou $y = -x/2 + 6$.
Resposta: As retas são y = 2x + 1 e y = –x/2 + 6.

b'')


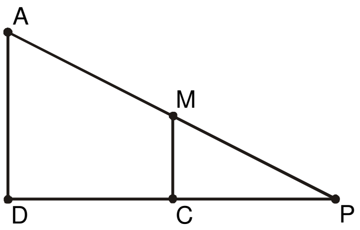
A figura ao lado mostra o vetor m, normal à reta dada, e o vetor M, que é perpendicular a m. O vetor a_1, que é normal a uma das retas desejadas, forma um ângulo de 45º com a m e com M. Assim, uma reta desejada tem a forma $4x - 2y + b_1 = 0$, de modo que $b_1 = 2$. Portanto, a reta é $4x - 2y + 2 = 0$. A segunda reta é perpendicular à primeira, de forma que seu vetor normal é (2, 4). Usando o ponto P mais uma vez, obtemos $2.2 + 4.5 + b_2 = 0$, o que fornece $b_2 = -24$. Logo, temos $2x + 4y - 24 = 0$.
Resposta: As retas são 4x – 2y + 2 = 0 e 2x + 4y – 24 = 0.

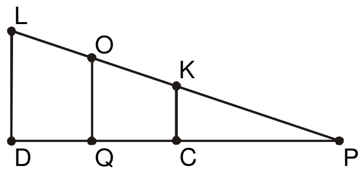
b''') A reta dada tem coeficiente angular $m = 1/3$. Se θ é o ângulo entre duas retas r e s, então $\tan(\theta) = \pm\dfrac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}$. Para $\theta = 45°$ e $m_r = 1/3$, temos $1 = \pm\dfrac{(1/3) - m_s}{1 + m_s/3}$, ou seja, $3 + m_s = \pm(1 - 3m_s)$. Assim, $m_s = 2$ ou $m_s = -1/2$. Como as retas passam pelo ponto P = (2, 5), temos, no primeiro caso, $(y - 5) = 2.(x - 2)$, ou $y = 2x + 1$, e, no segundo caso, $(y - 5) = (-1/2).(x - 2)$, ou $y = -x/2 + 6$.
Resposta: As retas são y = 2x + 1 e y = –x/2 + 6.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

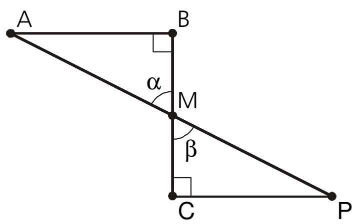
Questão 12

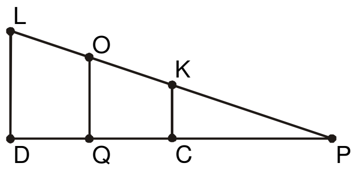
a)
Sabemos que o comprimento da aresta AD é igual a 6 cm e que o segmento CM tem 3 cm, pois M é o ponto médio da aresta BC. A figura abaixo, à esquerda, mostra os triângulos semelhantes ADP e MCP. Com base nessa figura, concluímos que AD/DP = CM/CP, ou seja, que 6/(6 + CP) = 3/CP, de modo que CP = 6 cm.
Na figura abaixo, à direita, conhecemos OQ = QC = 3 cm, pois O é o centro da face CDD_1C_1, e CP = 6 cm. Como os triângulos retângulos dessa figura são semelhantes, podemos escrever CK/CP = OQ/QP, ou seja, CK/6 = 3/9. Daí, CK = 2 cm. Da mesma forma, observamos que LD/DP = OQ/QP, ou seja, LD/12 = 3/9. Desta forma, LD = 4 cm.
Resposta: CK = 2 cm e LD = 4 cm.





a')
A figura abaixo, à esquerda, mostra os triângulos ABM e MCP. Os segmentos CM e BM têm 3 cm, pois M é o ponto médio da aresta BC. Por serem opostos pelo vértice, os ângulos α e β são iguais. Além disso, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são retos. Assim, concluímos que CP = AB = 6 cm.
Na figura abaixo, à direita, conhecemos OQ = QC = 3 cm, pois O é o centro da face CDD_1C_1, e CP = 6 cm. Como os triângulos retângulos dessa figura são semelhantes, podemos escrever CK/CP = OQ/QP, ou seja, CK/6 = 3/9. Daí, CK = 2 cm. Da mesma forma, observamos que LD/DP = OQ/QP, ou seja, LD/12 = 3/9. Desta forma, LD = 4 cm.
Resposta: CK = 2 cm e LD = 4 cm.





b)
O sólido desejado é o tronco de uma pirâmide de base triangular. A pirâmide maior, de vértices A, D, L e P, tem base com área A_G = AD.DL/2 = 6.4/2 = 12 cm^2. Uma vez que a altura dessa pirâmide é DP = 12 cm, seu volume é $V_G = A_G$.DP/3 = 12.12/3 = 48 cm^3. A pirâmide menor, de vértices C, K, M e P, tem base com área A_p = CM.CK/2 = 3.2/2 = 3 cm^2. Como essa pirâmide tem altura CP = 6 cm, seu volume é $V_p = A_p$.CP/3 = 3.6/3 = 6 cm^3. O volume desejado é dado por $V_G - V_p$ = 48 – 6 = 42 cm^3.
Resposta: O sólido tem volume igual a 42 cm^3.