01. Uma haste de comprimento L e massa m uniformemente distribuída repousa sobre dois apoios localizados em suas extremidades. Um bloco de massa m uniformemente distribuída encontra-se sobre a barra em uma posição tal que a reação em uma das extremidades é o dobro da reação na outra extremidade. Considere a aceleração da gravidade com módulo igual a g.

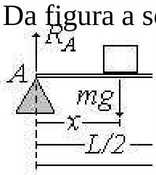
A) Determine as reações nas duas extremidades da haste.

Valor: 5 pontos

B) Determine a distância x entre o ponto em que o bloco foi posicionado e a extremidade em que a reação é maior.

Valor: 5 pontos

Comentário da Questão 01
Da figura a seguir, temos



$R_A + R_B = 2mg$ (1)

Substituindo-se $R_A = 2R_B$ na equação (1), obtemos $R_A = \frac{4}{3}mg$ e $R_B = \frac{2}{3}mg$ (item **A**).

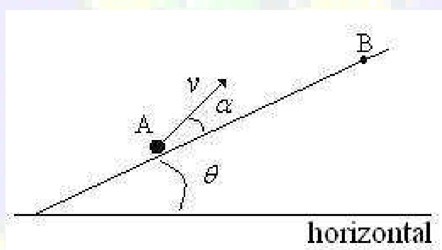
Usando-se o fato de que a soma dos momentos em torno do ponto A é zero, obtemos

$R_B L = mg\frac{L}{2} + mgx$. (2)

Como $R_B = \frac{2}{3}mg$, podemos determinar x a partir da equação (2):

$$x = \frac{R_B}{mg}L - \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{6}$$ (item **B**).

02. Uma partícula pontual é lançada de um plano inclinado conforme esquematizado na figura abaixo. O plano tem um ângulo de inclinação θ em relação à horizontal, e a partícula é lançada, com velocidade de módulo *v*, numa direção que forma um ângulo de inclinação α em relação ao plano inclinado. Despreze qualquer efeito da resistência do ar. Considere que a aceleração da gravidade local é constante (módulo igual a g, direção vertical, sentido para baixo).



A) Considerando o eixo *x* na horizontal, o eixo *y* na vertical e a origem do sistema de coordenadas cartesianas no ponto de lançamento, determine as equações horárias das coordenadas da partícula, assumindo que o tempo é contado a partir do instante de lançamento.

Valor: 3 pontos

B) Determine a equação da trajetória da partícula no sistema de coordenadas definido no item (A).

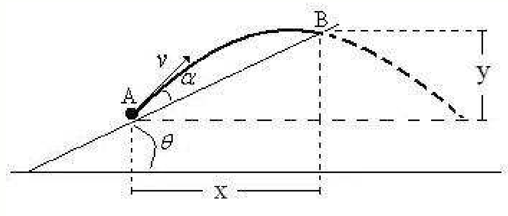
Valor: 3 pontos

C) Determine a distância, ao longo do plano inclinado, entre o ponto de lançamento (ponto A) e o ponto no qual a partícula toca o plano inclinado (ponto B). Considere $\alpha = \pi/12$ e $\theta = \pi/4$.

Valor: 4 pontos

Comentário da Questão 02

Em relação à horizontal, a partícula tem um ângulo de lançamento $(\theta+\alpha)$ e descreverá uma trajetória parabólica com concavidade para baixo, conforme a figura a seguir.



O alcance ao longo do plano inclinado é $d=\sqrt{x^2+y^2}$. As coordenadas x e y do ponto B têm as seguintes equações horárias:

$$x=[v\cos(\alpha+\theta)]t \qquad (1)$$

$$y=[v\mathrm{sen}(\alpha+\theta)]t-\frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

(item **A**),

onde t é o tempo medido a partir do lançamento. Calculando t na equação (1) e substituindo o resultado na equação (2), obtemos

$$y=[v\mathrm{sen}(\alpha+\theta)]\frac{x}{v\cos(\alpha+\theta)}-\frac{1}{2}g\left[\frac{x}{v\cos(\alpha+\theta)}\right]^2 \qquad (3)$$ (item **B**).

As coordenadas x e y do ponto B também podem ser relacionadas pela equação

$$y=[\tan\theta]x \qquad (4).$$

Substituindo a equação (4) na equação (3), obtemos

$$x=\frac{2v^2\cos^2(\alpha+\theta)}{g}[\tan(\alpha+\theta)-\tan\theta] \qquad (5).$$

Portanto, usando-se a relação dada na equação (4), obtemos

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2(1+\tan^2\theta)}=\sqrt{x^2(\sec^2\theta)}=x\sec\theta=\frac{x}{\cos\theta} \qquad (6),$$

onde x é dado na equação (5). Logo, o alcance ao longo do plano inclinado é

$$d=\frac{2v^2\cos^2(\alpha+\theta)}{g\cos\theta}[\tan(\alpha+\theta)-\tan\theta]$$

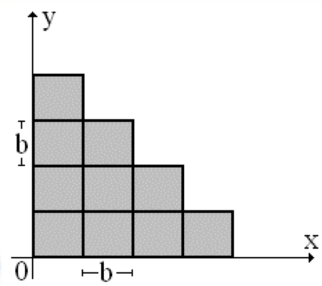
Substituindo os valores de α e θ na equação acima, obtemos

$$d=\frac{2v^2\cos^2(\pi/3)}{g\cos(\pi/4)}[\tan(\pi/3)-\tan(\pi/4)]$$

(item **C**).

$$\Rightarrow d=\frac{\sqrt{2}v^2}{2g}[\sqrt{3}-1]$$

03. Cada um dos quadrados mostrados na figura abaixo tem lado b e massa uniformemente distribuída. Determine as coordenadas (x, y) do centro de massa do sistema formado pelos quadrados.



Valor: 10 pontos

Comentário da Questão 03

Cada quadrado pode ser considerado como uma partícula pontual localizada no seu centro de massa (que corresponde ao centro do quadrado). Dessa forma, as coordenadas do centro de massa são dadas por

$$x = \frac{\left[4\cdot\left(\frac{b}{2}\right)+3\cdot\left(\frac{3b}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{5b}{2}\right)+1\cdot\left(\frac{7b}{2}\right)\right]m}{10m} = \frac{15b}{10} = 1{,}5b$$

$$y = \frac{\left[4\cdot\left(\frac{b}{2}\right)+3\cdot\left(\frac{3b}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{5b}{2}\right)+1\cdot\left(\frac{7b}{2}\right)\right]m}{10m} = \frac{15b}{10} = 1{,}5b$$

Logo, o centro de massa do sistema está localizado no ponto $(x = 1{,}5b\,;\, y = 1{,}5b)$.

04. Uma partícula de massa m move-se sobre o eixo x, de modo que as equações horárias para sua velocidade e sua aceleração são, respectivamente, $v(t) = -\omega A sen(\omega t + \varphi)$ e $a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$, com ω, A e φ constantes.

A) Determine a força resultante em função do tempo, $F(t)$, que atua na partícula.

Valor: 2 pontos

B) Considere que a força resultante também pode ser escrita como $F(t) = -kx(t)$, onde $k = m\omega^2$. Determine a equação horária para a posição da partícula, $x(t)$, ao longo do eixo *x*.

Valor: 2 pontos

C) Sabendo que a posição e a velocidade da partícula no instante inicial $t = 0$ são $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$, respectivamente, determine as constantes A e φ.

Valor: 3 pontos

D) Usando as expressões para as energias cinética, $E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2(t)$, e potencial, $E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2(t)$, mostre que a energia mecânica da partícula é constante.

Valor: 3 pontos

Comentário da Questão 04

Pela segunda lei de Newton, a força resultante é

$$F(t) = ma(t) = -m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1) \qquad\qquad \text{(item } \mathbf{A}\text{).}$$

Sendo $F(t) = -kx(t)$ e usando-se o resultado obtido em (1), temos que

$$-m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -kx(t) \;\Rightarrow\; x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (2) \qquad \text{(item } \mathbf{B}\text{).}$$

A posição e a velocidade em $t = 0$ são

$$x(0) = x_0 = \text{A}\cos(\varphi) \qquad (3)$$

$$v(0) = v_0 = -\omega\text{A}\,\text{sen}(\varphi) \qquad (4)$$

A partir das equações (3) e (4), obtemos

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \qquad (5) \quad \text{(item } \mathbf{C}\text{).}$$

Usando as equações para a energia cinética e potencial, juntamente com as equações horárias da posição e velocidade, temos que

$$E_c(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 \text{sen}^2(\omega t + \varphi);$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2(t) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi).$$

A energia mecânica é a soma da energia cinética com a energia potencial. Logo,

$$E_{Mec} = \frac{1}{2}kA^2\text{sen}^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2\left[\text{sen}^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\right] = \frac{1}{2}kA^2,$$

que é uma constante (item **D**).

05. Um recipiente cilíndrico fechado de volume V possui paredes adiabáticas e é dividido em dois compartimentos iguais por uma parede fixa, também adiabática. Em cada um dos compartimentos encontram-se N mols de um gás ideal monoatômico. Suas respectivas temperaturas iniciais são T e 2T.

A) A parede adiabática fixa é liberada e pode deslocar-se livremente até atingir nova situação de equilíbrio, na qual o volume de um compartimento é o triplo do volume do outro. Calcule o módulo do trabalho realizado por um gás sobre o outro.

.

Valor: 5 pontos

B) A parede adiabática é novamente presa quando a situação de equilíbrio do item anterior é atingida e perde suas propriedades isolantes, permitindo que haja troca de calor entre os dois recipientes, até atingir novo equilíbrio. Determine o módulo do calor trocado entre os recipientes.

Valor: 5 pontos

Comentário da Questão 05

A equação de estado de um gás ideal é dada por

$$PV = NRT \qquad (1),$$

onde P é a pressão a que está submetido o gás, V é o volume que o gás ocupa, T é a temperatura do gás, N é o número de mols do gás, e R é a constante universal dos gases ideais. Se aplicarmos essa equação a cada um dos gases contidos nos recipientes antes de a parede central ser liberada, obtemos

$$P_1V/2 = NRT \text{ e } P_2V/2 = NR2\mathrm{T} \qquad (2),$$

o que implica que $P_2 = 2\mathrm{P}_1$. Portanto, concluímos que a parede central, após ser liberada, mover-se-á na direção do recipiente que estava inicialmente a uma temperatura T. A parede central mover-se-á até que as pressões nos seus dois lados sejam iguais. Se, nesse estado final de equilíbrio, o volume do gás que se expandiu for o triplo do que foi comprimido, concluímos que a temperatura final de equilíbrio do primeiro é também o triplo da temperatura final do segundo, ou seja, $T_2 = 3\mathrm{T}_1$ (basta usar a equação de estado para os dois gases na situação final de equilíbrio). Além disso, a energia interna total do sistema composto pelos dois gases não varia, já que o cilindro possui paredes adiabáticas. Isso implica que

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0 \qquad (3),$$

onde $\Delta U_1 = 3NR(T_1 - T)/2$ e $\Delta U_2 = 3NR(T_2 - 2\mathrm{T})/2$ são as variações de energia interna dos dois gases ideais monoatômicos (a energia interna de um gás ideal monoatômico é dada por $U = 3NRT/2$). Combinando essas equações com $T_2 = 3\mathrm{T}_1$, obtemos $T_1 = 3\mathrm{T}/4$ e $T_2 = 9\mathrm{T}/4$. Usando-se a primeira lei da Termodinâmica, $\Delta U = Q - W$, para cada um dos gases ideais, e sabendo-se que a parede que separa os dois gases é adiabática (o que implica que os gases não trocam calor, $Q = 0$), concluímos que $W = -\Delta U$. Portanto, o módulo do trabalho que um sistema realiza sobre o outro é dado por

$$W = -\Delta U_1 = \Delta U_2 = -3NR(3T/4 - T)/2 = 3NR\,(9T/4 - 2T)/2 = 3NRT/8 \text{ (item } \mathbf{A}\text{)}.$$

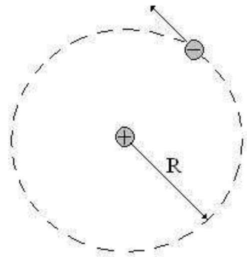
Quando a parede é novamente fixada e passa a permitir a troca de calor entre os dois recipientes, esta ocorrerá até que as temperaturas dos recipientes sejam iguais ($T_1 = T_2 = T'$). A temperatura T' pode ser obtida a partir da relação dada na equação (3), aplicada nesse processo. Logo,

$$\frac{3}{2}NR(T' - \frac{3T}{4}) + \frac{3}{2}NR(T' - \frac{9T}{4}) = 0 \;\Rightarrow\; T' = \frac{3T}{2}.$$

O módulo do da quantidade de calor trocada é dado por

$$Q = \Delta U_1 = -\Delta U_2 = \frac{3}{2}NR\left(\frac{3T}{2} - \frac{3T}{4}\right) = -\frac{3}{2}NR\left(\frac{3T}{2} - \frac{9T}{4}\right) = \frac{9}{8}NRT \text{ (item } \mathbf{B}\text{)}.$$

06. Uma partícula com carga positiva $+q$ é fixada em um ponto, atraindo uma outra partícula com carga negativa $-q$ e massa m, que se move em uma trajetória circular de raio R, em torno da carga positiva, com velocidade de módulo constante (veja a figura a seguir). Considere que não há qualquer forma de dissipação de energia, de modo que a conservação da energia mecânica é observada no sistema de cargas. Despreze qualquer efeito da gravidade. A constante eletrostática é igual a k.



A) Determine o módulo da velocidade v com que a carga negativa se move em torno da carga positiva.

Valor: 2 pontos

B) Determine o período do movimento circular da carga negativa em torno da carga positiva.

Valor: 2 pontos

C) Determine a energia total do sistema.

Valor: 2 pontos

D) Considere que o produto da massa da partícula com carga negativa pela sua velocidade e pelo raio da trajetória circular é igual ao produto de um número inteiro por uma constante; ou seja, $mvR = n\hbar$, onde n é o número inteiro ($n = 1,2,3,...$) e $\hbar$, a constante. Determine a energia total do sistema em termos de n, $\hbar$, q e k.

Valor: 2 pontos

E) Determine a freqüência do movimento da carga negativa em torno da carga positiva em termos de n, $\hbar$, q e k.

Valor: 2 pontos

Comentário da Questão 06

A carga negativa move-se em torno da positiva em movimento circular uniforme. A força que mantém esse movimento é a força elétrica atrativa entre as cargas, que desempenha aqui o papel de força centrípeta. A força entre as cargas é dada pela Lei de Coulomb:

$$F_{el} = k\frac{q^2}{R^2} \qquad (1).$$

Igualando a força elétrica à força centrípeta, obtemos a velocidade da carga negativa:

$$F_{el} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow k\frac{q^2}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{kq^2}{mR}} \qquad (2) \qquad \text{(item A).}$$

O movimento da carga negativa é periódico. O tempo gasto pela carga negativa para dar uma volta em torno da positiva é o período do movimento. Esse tempo pode ser calculado como

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{kq^2}{mR}}} = 2\pi\sqrt{\frac{mR^3}{kq^2}} \qquad (3) \qquad \text{(item B)}.$$

A energia total do sistema corresponde à soma da energia cinética com a energia potencial (elétrica). Logo,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-k\frac{q^2}{R}\right) \qquad (4).$$

Substituindo a velocidade, obtida em (2), na equação (4), obtemos a energia total do sistema de cargas. Portanto,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - k\frac{q^2}{R} = \frac{1}{2}\frac{kq^2}{R} - \frac{kq^2}{R} \Rightarrow E = -\frac{1}{2}\frac{kq^2}{R} \qquad (5) \qquad \text{(item C)}.$$

Seguindo a orientação do problema $mvR = n\hbar$, onde n é um número inteiro ($n = 1,2,3,...$) e $\hbar$ uma constante, temos que

$$R = \frac{n\hbar}{mv} = \frac{n\hbar}{m\sqrt{\frac{kq^2}{mR}}} \Rightarrow \mathrm{R}^2 = \frac{n^2\hbar^2}{\frac{mkq^2}{R}} \Rightarrow \mathrm{R} = \frac{n^2\hbar^2}{mkq^2} \qquad (6).$$

Substituindo (6) em (5), obtemos a resposta esperada. Ou seja,

$$E = -\frac{1}{2}\frac{mk^2q^4}{\hbar^2}\frac{1}{n^2} \qquad (7) \qquad \text{(item D)},$$

que é a energia quantizada obtida no modelo de Bohr. Ou seja, a energia assume um valor característico dependendo do número inteiro *n*.

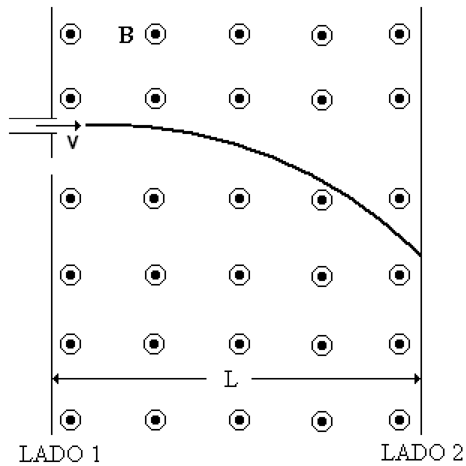
A freqüência pode ser calculada diretamente como o inverso do período, dado na equação (3). Assim,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{mR^3}{kq^2}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kq^2}{mR^3}} \qquad (8)$$

Substituindo o valor de R, obtido em (6), na equação (8), temos a freqüência quantizada. Logo,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m^2k^4q^8}{n^6\hbar^6}} = \frac{1}{2\pi}\frac{mk^2q^4}{n^3\hbar^3} \qquad (9) \qquad \text{(item E)}.$$

07. Duas partículas pontuais P_1 e P_2, com massas m_1 e m_2, possuem cargas elétricas q_1 e q_2, respectivamente. Ambas as partículas são lançadas através de um tubo em uma região na qual existe um campo magnético $\vec{B}$, perpendicular ao plano da página e apontando para fora dela, conforme a figura abaixo. Considere $m_1 = 4m$, $m_2 = m$, $q_1 = 3q$ e $q_2 = q$. Desconsidere qualquer efeito da gravidade e quaisquer atritos que porventura possam existir.



A) Determine a energia mínima necessária de cada partícula para que a trajetória resultante toque o LADO 2.

Valor: 5 pontos

B) Determine o tempo gasto pela partícula que primeiro retorna ao LADO 1, obedecendo à condição do item (A).

Valor: 5 pontos

Comentário da Questão 07

A) A força magnética F_m é perpendicular à velocidade de uma partícula carregada movendo-se em um campo magnético perpendicular ao plano de movimento da partícula, de modo que a trajetória resultante é circular. Como a força magnética é a única que atua nas partículas, ela é a própria força centrípeta (F_{cp}). Assim, para cada partícula vale a relação

$$F_m = F_{cp} \Rightarrow qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \frac{qBR}{m} \qquad (1),$$

onde R é o raio da trajetória circular. A condição para que a partícula tangencie o LADO 2 é $R = L$. Usando-se essa condição e a equação (1), a energia mínima que cada partícula deve ter para que sua trajetória tangencie o LADO 2 é

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{9}{8}\frac{q^2B^2L^2}{m} \qquad (2);$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2B^2L^2}{m} \qquad (3).$$

B) Em um movimento circular uniforme, o período do movimento é inversamente proporcional à velocidade e é dado por $T = 2\pi R/v$, onde R é o raio e v, a velocidade. Portanto, a partícula que possui maior velocidade deve executar um movimento circular uniforme com menor período. Substituindo-se os valores de carga e massa de ambas as partículas na equação (1), chega-se à conclusão de que a partícula P_2 atinge o LADO 1 primeiro. O tempo necessário corresponde à metade do período do movimento circular. O período da partícula P_2 é

$$T = \frac{2\pi L}{v_2} = \frac{2\pi Lm}{qBL} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Logo, o tempo que a partícula P_2 leva para atingir o LADO 1 é

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB}.$$

08. O núcleo de um determinado elemento **A**, constituído por dois prótons e dois nêutrons, tem massa $m_A \approx 6{,}691 \times 10^{-27}$ kg. Medidas experimentais mostram que a soma da massa dos dois prótons, $m_P \approx 3{,}345 \times 10^{-27}$ kg, com a massa dos dois nêutrons, $m_N \approx 3{,}350 \times 10^{-27}$ kg, não é igual à massa do núcleo. Isto significa que existe uma energia mínima necessária para separar os constituintes do núcleo do elemento **A**, denominada aqui de energia de ligação E_L.

(Dados: velocidade da luz no vácuo $c = 3 \times 10^8$ m/s; constante de Planck $h = 6 \times 10^{-34}\ J \cdot s$).

A) Determine a energia de ligação para separar prótons e nêutrons em um núcleo do elemento **A**.

Valor: 5 pontos

B) No caso de ser possível separar os constituintes do núcleo do elemento **A** incidindo fótons de uma radiação eletromagnética de freqüência $f = 1{,}2 \times 10^{15}\ Hz$, determine o número de fótons necessários para que isso ocorra.

Valor: 5 pontos

Comentário da Questão 08

A) A soma das massas dos prótons e dos nêutrons é

$$m_p + m_n = 6{,}695 \times 10^{-27} \text{ kg} \qquad (1).$$

A diferença em relação à massa do núcleo do elemento A é $\Delta m = 0{,}004 \times 10^{-27}$ kg. O equivalente em energia dessa diferença de massa é a energia de ligação. O equivalente em energia é obtido pela equação de Einstein

$$E_L = \Delta m c^2 \qquad (2),$$

onde $c = 3 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz no vácuo. Substituindo os valores de c e Δm em (2), obtemos

$$E_L = 3{,}6 \times 10^{-13} \text{ J},$$

que é a energia mínima para separar prótons e nêutrons.

B) Cada fóton tem energia $E_{foton} = hf$, onde h é a constante de Planck. O número total de fótons para separar prótons e nêutrons no núcleo do elemento **A** é

$$N = \frac{E_L}{hf} = \frac{3{,}6 \times 10^{-13}\ J}{(6 \times 10^{-34}\ J \cdot s)(1{,}2 \times 10^{15}\ Hz)} = 5 \times 10^5 \text{ fótons}.$$