

01. A seqüência  $(a_n)_{n \geq 1}$  tem seus termos dados pela fórmula  $a_n = \frac{n+1}{2}$ . Calcule a soma dos dez primeiros termos da seqüência  $(b_n)_{n \geq 1}$ , onde  $b_n = 2^{a_n}$  para  $n \geq 1$ .

**Comentário da Questão 01**

Assunto: Seqüências e progressões.

Solução: A seqüência  $(b_n)_{n \geq 1}$  é uma PG de termo inicial  $b_1 = 2^{a_1} = 2$  e razão  $2^{1/2} = \sqrt{2}$ . Portanto, a soma de seus dez primeiros termos é

$$S_{10} = b_1 \left( \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{2}^{10} - 1}{\sqrt{2} - 1} \right) = 62(\sqrt{2} + 1).$$

02. A massa crua com que é fabricado um certo tipo de pão é composta de 40% de água. Para obtermos um pão assado de 35 gramas, é necessária uma massa inicial de 47 gramas. Qual o valor aproximado do percentual de água evaporada durante o tempo de preparo desse pão, sabendo-se que a água é a única substância perdida durante esse período?

**Comentário da Questão 02**

Assunto: Porcentagem.

Solução: A massa evaporada de 12 g corresponde à água que evaporou. Por outro lado, a massa inicial de água era  $\frac{4}{10} \cdot 47 = 18,8$  g, de maneira que o percentual de água evaporada é

$$\frac{12}{18,8} \cdot 100\% \cong 63,8\%.$$

03.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  é um paralelepípedo reto-retângulo de bases  $ABCD$  e  $A_1 B_1 C_1 D_1$ , com arestas laterais  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  e  $DD_1$ . Calcule a razão entre os volumes do tetraedro  $A_1 B C_1 D$  e do paralelepípedo  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

**Comentário da Questão 03**

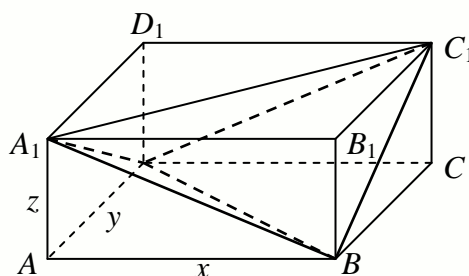
Assunto: Geometria espacial.

Solução: A figura abaixo representa a situação do problema (o vértice imediatamente abaixo de  $D_1$  é o vértice  $D$ ). Denotando por  $x$ ,  $y$  e  $z$  as dimensões do paralelepípedo (também como na figura), temos  $AB = CD = A_1 B_1 = C_1 D_1 = x$ ,  $AD = BC = B_1 C_1 = A_1 D_1 = y$  e  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = z$ . O volume de  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  é claramente dado por  $xyz$ . Quanto ao volume de  $A_1 B C_1 D$ , temos

$$\begin{aligned} V(A_1 B C_1 D) &= V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1) - V(AA_1 B D) - V(B_1 A_1 B C_1) - V(C B C_1 D) - V(D_1 A_1 C_1 D) \\ &= xyz - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{xy}{2} \cdot z = \frac{xyz}{3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{V(A_1 B C_1 D)}{V(ABCD A_1 B_1 C_1 D_1)} = \frac{xyz/3}{xyz} = \frac{1}{3}.$$



04. Encontre as equações das retas tangentes à parábola  $y = x^2$  que passam pelo ponto  $(0, -1)$ .

**Comentário da Questão 04**

Assunto: Geometria analítica e equações de segundo grau.

Solução: Sendo  $m$  o coeficiente angular da reta tangente, temos que sua equação é  $y = mx - 1$ . A fim de que tal reta tangencie a parábola, é necessário e suficiente que o sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx - 1 \end{cases}$$

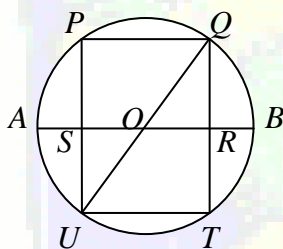
possua uma única solução; para tanto, a equação  $x^2 = mx - 1$  deve ter discriminante igual a 0, i.e.,  $m^2 - 4 = 0$ . Há, assim, duas possibilidades:

- $m = 2$ , fornecendo a tangente  $y = 2x - 1$ ;
- $m = -2$ , fornecendo a tangente  $y = -2x - 1$ .

05. Seja  $\Gamma$  uma semi-circunferência de diâmetro  $AB$  e raio 1. Encontre o maior valor possível para a área de um retângulo  $PQRS$  construído de tal modo que  $R$  e  $S$  estejam sobre  $AB$  e  $P$  e  $Q$  sobre  $\Gamma$ .

**Comentário da Questão 05**

Assunto: Funções de segundo grau; geometria plana; trigonometria.



Solução 1: Seja  $PQTU$  o retângulo de lado  $PQ$  e inscrito em  $\Gamma$ . Como a área de  $PQRS$  é metade da área de  $PQTU$ , que por sua vez é o dobro da área de  $QUT$ , temos que  $PQRS$  e  $QUT$  têm áreas iguais, e basta maximizar a área de  $QUT$ . Como  $QU = 2$ , o maior valor possível para a área de  $QUT$  será obtido quando a altura relativa a  $T$  for a maior possível, i.e., quando  $TO$  for perpendicular a  $QU$ . Nesse caso, temos

$$A(PQRS) = A(QUT) = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

Solução 2: Se  $\angle QOR = \theta$ , então as relações trigonométricas no triângulo  $QOR$  nos dão  $QR = \sin \theta$  e  $OR = \cos \theta$ , de modo que a área de  $PQRS$  é igual a  $(\sin \theta)(2\cos \theta) = \sin(2\theta)$ . Portanto, o valor máximo de tal área é 1, ocorrendo quando  $\theta = \pi/4$ .

Solução 3: Se  $OR = x$  e  $QR = y$ , então a área de  $PQRS$  é igual a  $2xy$ . Por outro lado, segue do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo  $OQR$  que  $x^2 + y^2 = 1$ , e daí

$$2xy = 2x\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{x^2-x^4}.$$

Se  $z = x^2$ , segue da expressão acima para a área que basta maximizar a função de segundo grau  $f(z) = z - z^2$  para  $0 < z < 1$ . É bem sabido que tal função admite  $z = 1/2$  como seu único ponto de máximo; ademais, observemos que tal ponto pertence ao intervalo  $(0, 1)$ , de maneira que o valor máximo desejado é  $f(1/2) = 1/4$ . Portanto, a área máxima é  $2\sqrt{1/4} = 1$ .

06. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = 2\sin x + \cos(2x)$ . Calcule os valores máximo e mínimo de  $f$ , bem como os números reais  $x$  para os quais  $f$  assume tais valores.

#### Comentário da Questão 06

Assunto: Composição de funções; funções de segundo grau; trigonometria.

Solução: De  $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$  obtemos  $f(x) = -2\sin^2 x + 2\sin x + 1$ . Sendo  $g(x) = -2x^2 + 2x + 1$ , temos  $f = g \circ \sin$ , onde  $\sin$  denota a função seno. Como tal função tem por imagem o intervalo  $[-1, 1]$ , os valores máximo e mínimo de  $f$  são iguais aos valores máximo e mínimo de  $g$  restrita a  $[-1, 1]$ . Mas o estudo do crescimento de funções de segundo grau garante que a função  $g$  assume seu valor máximo para  $x = 1/2$ , sendo estritamente crescente no intervalo  $(-\infty, 1/2]$  e estritamente decrescente no intervalo  $[1/2, +\infty)$ . Logo:

- i) O valor máximo de  $f$  é  $g(1/2) = 3/2$ , obtido quando  $\sin x = 1/2$ , quer dizer, quando  $x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$ .
- ii) O valor mínimo de  $f$  é o menor dentre os números  $g(-1) = -3$  e  $g(1) = 1$ ; assim, o valor mínimo de  $f$  é  $-3$ , obtido quando  $\sin x = -1$ , quer dizer, quando  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$ .

07. No plano cartesiano, a hipérbole  $xy = 1$  intersecta uma circunferência  $\Gamma$  em quatro pontos distintos  $A, B, C$  e  $D$ . Calcule o produto das abscissas dos pontos  $A, B, C$  e  $D$ .

#### Comentário da Questão 07

Assunto: Geometria analítica; polinômios; funções.

Solução: Se  $C(a, b)$  é o centro e  $r > 0$  é o raio de  $\Gamma$ , então sua equação cartesiana é  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ . Os pontos comuns a  $\Gamma$  e à hipérbole são as soluções do sistema

$$\begin{cases} xy = 1 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

de modo que as abscissas de  $A, B, C$  e  $D$  são soluções da equação  $(x - a)^2 + (1/x - b)^2 = r^2$ , ou ainda  $x^4 - 2ax^3 + (a^2 + b^2 - r^2)x^2 - 2bx + 1 = 0$ . Por outro lado, é imediato que as abscissas de  $A, B, C$  e  $D$  se constituem em todas as raízes da equação polinomial acima; logo, pelas relações de Girard entre coeficientes e raízes de equações polinomiais, segue que seu produto é igual a 1.

08. Escolhemos cinco números, sem repetição, dentre os inteiros de 1 a 20. Calcule quantas escolhas distintas podem ser feitas, sabendo que ao menos dois dos cinco números selecionados devem deixar um mesmo resto quando divididos por 5.

#### Comentário da Questão 08

Assunto: Análise combinatória.

Solução: Particionam-se os números de 1 a 20 de acordo com os restos de sua divisão por 5, obtendo-se os conjuntos  $\{1, 6, 11, 16\}$ ,  $\{2, 7, 12, 17\}$ ,  $\{3, 8, 13, 18\}$ ,  $\{4, 9, 14, 19\}$ ,  $\{5, 10, 15, 20\}$ . Os cinco números escolhidos deixarão restos dois a dois distintos na divisão por 5 se e só se vierem um de cada um desses conjuntos. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, temos  $4^5$  possibilidades de escolha de cinco números satisfazendo essa condição. Descontando tais possibilidades das  $\binom{20}{5}$  escolhas possíveis de cinco números distintos de 1 a 20, obtemos a resposta desejada:  $\binom{20}{5} - 4^5 = 14480$ .