

Matemática – FUVEST 2001

Q.01

A diferença entre dois números inteiros positivos é 10. Ao multiplicar um pelo outro, um estudante cometeu um engano, tendo diminuído em 4 o algarismo das dezenas do produto. Para conferir seus cálculos, dividiu o resultado obtido pelo menor dos fatores, obtendo 39 como quociente e 22 como resto. Determine os dois números.

Q.02

A hipotenusa de um triângulo retângulo está contida na reta $r : y = 5x - 13$, e um de seus catetos está contido na reta $s : y = x - 1$. Se o vértice onde está o ângulo reto é um ponto da forma $(k, 5)$ sobre a reta s , determine

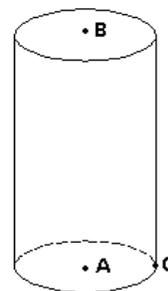
- todos os vértices do triângulo;
- a área do triângulo.

Q.03

- a) Calcule $\cos 3\theta$ em função de $\sin \theta$ e de $\cos \theta$.
- b) Calcule $\sin 3\theta$ em função de $\sin \theta$ e de $\cos \theta$.
- c) Para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, resolva a equação: $\sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos \theta + 1 = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos \theta}$.

Q.04

Na figura ao lado, têm-se um cilindro circular reto, onde A e B são os centros das bases e C é um ponto da intersecção da superfície lateral com a base inferior do cilindro. Se D é o ponto do segmento \overline{BC} , cujas distâncias a \overline{AC} e \overline{AB} são ambas iguais a d , obtenha a razão entre o volume do cilindro e sua área total (área lateral somada com as áreas das bases), em função de d .



Matemática – FUVEST 2001

Q.05

Considere dois números reais λ e μ tais que $\lambda \neq -1$, $\mu \neq 1$ e $\lambda\mu \neq 0$.

a) Determine uma relação entre λ e μ , para que as equações polinomiais

$\lambda x^3 - \mu x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$ e $\lambda x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$ possuam uma raiz comum.

b) Nesse caso, determine a raiz comum.

Q.06

No plano complexo, cada ponto representa um número complexo. Nesse plano, considere o hexágono regular, com centro na origem, tendo i , a unidade imaginária, como um de seus vértices.

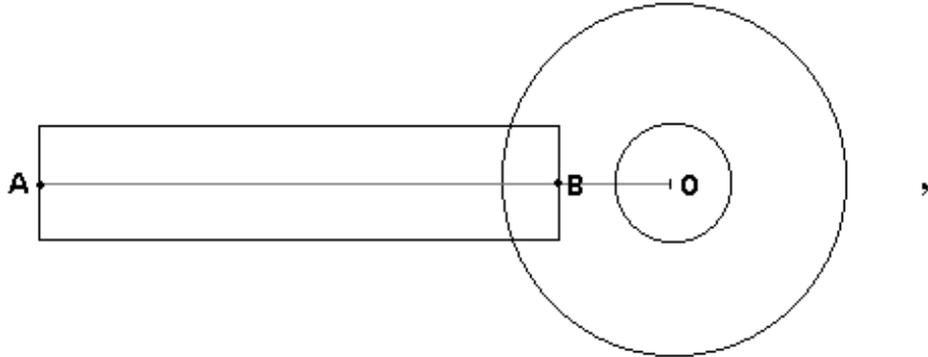
a) Determine os vértices do hexágono.

b) Determine os coeficientes de um polinômio de grau 6, cujas raízes sejam os vértices do hexágono.

Matemática – FUVEST 2001

Q.07

Um agricultor irriga uma de suas plantações utilizando duas máquinas de irrigação. A primeira irriga uma região retangular, de base 100 m e altura 20 m, e a segunda irriga uma região compreendida entre duas circunferências de centro O, e de raios 10 m e 30 m. A posição relativa dessas duas regiões é dada na figura



onde A e B são os pontos médios das alturas do retângulo. Sabendo-se ainda que os pontos A, B e O estão alinhados e que $BO = 20$ m, determine

- a área da intersecção das regiões irrigadas pelas máquinas;
- a área total irrigada.

Utilize as seguintes aproximações: $\sqrt{2} = 1,41$, $\pi = 3,14$ e $\arcsen \frac{1}{3} = 0,340$ rad.

Q.08

Um dado, cujas faces estão numeradas de um a seis, é dito *perfeito* se cada uma das seis faces tem probabilidade $1/6$ de ocorrer em um lançamento. Considere o experimento que consiste em três lançamentos independentes de um dado perfeito. Calcule a probabilidade de que o produto desses três números seja

- par;
- múltiplo de 10.

Q.09

Dado um número real a , considere o seguinte problema:

"Achar números reais x_1, x_2, \dots, x_6 , **não todos nulos**, que satisfaçam o sistema linear:

$$(r-2)(r-3)x_{r-1} + \left((r-1)(r-3)(r-4)(r-6)a + (-1)^r \right) x_r + (r-3)x_{r+1} = 0,$$

para $r = 1, 2, \dots, 6$, onde $x_0 = x_7 = 0$ ".

- Escreva o sistema linear acima em forma matricial.
- Para que valores de a o problema acima tem solução?
- Existe, para algum valor de a , uma solução do problema com $x_1 = 1$? Se existir, determine tal solução.

Q.10

São dados os pontos A e B e um segmento contendo os pontos G , H e I . Sabe-se que A e B pertencem, respectivamente, às diagonais \overline{CE} e \overline{DF} de um quadrado $CDEF$, cujo centro é O . A distância de A a O é igual a GH e a medida do lado do quadrado é igual a GI . Construa, usando régua e compasso, um quadrado $CDEF$, satisfazendo as condições acima. Descreva e justifique as construções utilizadas.

Matemática – FUVEST 2001

Figura utilizada para responder ítem a da questão 09

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matemática – FUVEST 2001

Figura utilizada para responder a questão 10

