PROVA DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

1)a)Dê o domínio da função $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-7x+12}}$.

b)Resolva a inequação: $\dfrac{2+3x}{1-x}\geq 4$.

RESOLUÇÃO

a)Devemos ter $\dfrac{x-1}{x^2-7x+12}\geq 0$.

Fazendo $N=x-1\,e\ \ D=x^2-7x+12$, teremos o seguinte quadro de sinais:

	1	3	4	
N	-	+	+	+
D	+	+	-	+
N/D	-	+	-	+

Tendo em conta que $x\neq 3\ \ e\ \ x\neq 4$, teremos o seguinte domínio:

$$D=\left\{x\in R\,/\,1\leq x<3\ \ ou\ \ x>4\right\}.$$

b) $\dfrac{2+3x}{1-x}\geq 4\Leftrightarrow\dfrac{2+3x}{1-x}-4\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{7x-2}{1-x}\geq 0$.

Fazendo $N=7x-2\ \ e\ \ D=1-x$, teremos o seguinte quadro de sinais:

	2/7	1	
N	-	+	+
D	+	+	-
N/D	-	+	-

Como $x\neq 1$, teremos o seguinte conjunto solução:

$$S=\left\{x\in R\,/\,\frac{2}{7}\leq x<1\right\}.$$

Resposta: a) $D=\left\{x\in R\,/\,1\leq x<3\ \ ou\ \ x>4\right\}$ b) $S=\left\{x\in R\,/\,\dfrac{2}{7}\leq x<1\right\}$.

2)O Sr. Oliveira aplicou R$20.000,00 numa caderneta de poupança, e R$30.000,00 num fundo de ações por 1 ano. Neste período, a caderneta de poupança rendeu 8% e o fundo de ações apenas 2%.
a)Qual a taxa de rendimento global do Sr. Oliveira, no período?
b)Quanto ele deveria ter aplicado no fundo de ações(mantida a aplicação de R$20.000,00 na caderneta de poupança) para que sua taxa global fosse de 6% ao ano?

RESOLUÇÃO

a)Temos:

- Ganho na caderneta de poupança: $0{,}08.(20000) = 1600$
- Ganho no fundo de ações: $0{,}02.(30000) = 600$
- Ganho total: $1600 + 600 = 2200$
- Taxa de rendimento global: $\frac{2200}{50000} = 0{,}044 = 4{,}4\%$

b)Seja x a quantia procurada. Teremos:

- Ganho na caderneta de poupança: $0{,}08.(20000) = 1600$
- Ganho no fundo de ações: $0{,}02x$
- Ganho total: $1600 + 0{,}02x$

Portanto

$$\frac{1600 + 0{,}02x}{20000 + x} = 0{,}06$$

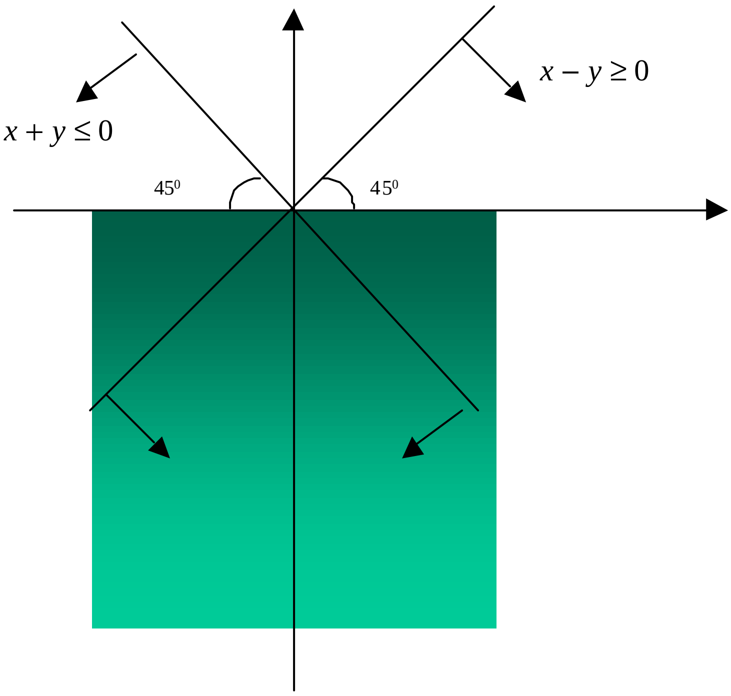
Resolvendo a equação acima obtemos $x = 10000$.

Resposta: a)4,4% b)R$10 000,00

3)a)Represente os pontos do plano cartesiano que satisfazem simultaneamente as relações $x - y \geq 0$ e $x + y \leq 0$.

b)Uma empresa fabrica uma peça de precisão em dois modelos A e B. O custo de produção de uma unidade de A é R$200,00 e o de B é R$150,00. Por restrições de orçamento, a empresa pode gastar por mês no máximo R$45.000,00. A mão de obra disponível permite fabricar por mês no máximo 250 peças. Seja x a quantidade produzida por mês de A e y a de B. Represente graficamente os possíveis valores de x e y.Admita, para simplificar que x e y assumam valores reais não negativos.

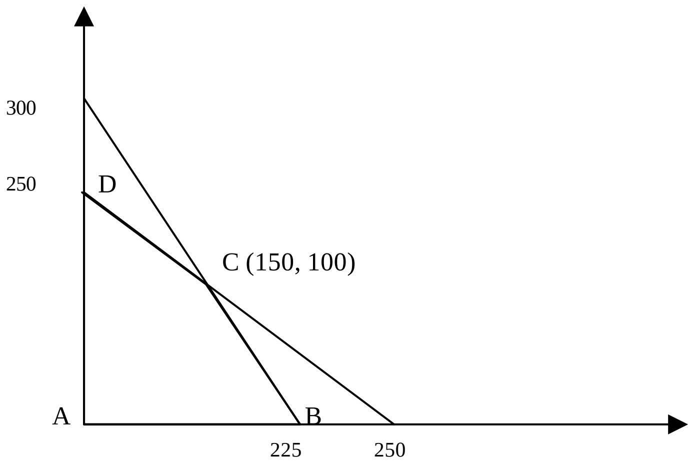
RESOLUÇÃO



b)Devemos ter simultaneamente:

$$\begin{cases} 200x + 150y \leq 45000 \\ x + y \leq 250 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

cuja representação gráfica é dada pelo quadrilátero ABCD abaixo:



300
250
D
C (150, 100)
A
B
225
250

4)Uma locadora A de automóveis cobra R$90,00 por dia de aluguel de um certo carro. Uma outra locadora B cobra pelo mesmo modelo de carro, um valor fixo de R$210,00 mais R$80,00 por dia de aluguel. Seja n o número de dias que um cliente pretende alugar este carro.
a)Para que valores de n é preferível a empresa A?
b)Qual deveria ser o valor fixo cobrado pela locadora B, para que B fosse preferível para $n > 27$ dias?

RESOLUÇÃO

a)Sejam $C_A = 90n \ \ e \ \ C_B = 210 + 80n$ os custos de A e B respectivamente. Devemos ter:

$$C_A < C_B \quad isto\ e'$$
$$90n < 210 + 80n \Rightarrow \ n < 21$$

b)Admitindo que *n* possa assumir qualquer valor real positivo, e chamando de *k* o custo fixo procurado, teremos $C_B = k + 80n$. Tendo em conta que os gráficos de $C_A \ e \ C_B$ são semi retas, devemos ter:

$$k + 80n < 90n$$
$$k < 10n$$
$$n > \frac{k}{10}$$

Assim,

$$\frac{k}{10} = 27 \Rightarrow k = 270.$$

<u>Observação</u>

Como no item (b) alguns alunos interpretaram de forma diferente o enunciado (como por exemplo o fato de *n* obrigatoriamente ser inteiro), a banca resolveu aceitar também estas soluções.

Resposta: a) $n < 21$ b)270.

5)Resolva , no campo real, as equações:

a) $5.(1+x)^5 = 20$.

b) $\sqrt{3x+4} - x = -8$.

RESOLUÇÃO

a)

$$5(1+x)^5 = 20$$

$$(1+x)^5 = 4$$

$$(1+x) = 4^{\frac{1}{5}}$$

$$x = 4^{\frac{1}{5}} - 1 = \sqrt[5]{4} - 1.$$

b)

$$\sqrt{3x+4} - x = -8$$

$$\sqrt{3x+4} = x - 8$$

$$3x + 4 = (x-8)^2$$

$$x^2 - 19x + 60 = 0 \;\Rightarrow\; x = 15 \;\; ou \;\; x = 4$$

Substituindo os valores $x = 15\, e\;\; x = 4$ na equação original, verificamos que apenas $x = 15$ satisfaz a equação. Assim, $S = \{15\}$.

Respostas: a) $S = \left\{4^{\frac{1}{5}} - 1\right\}$ b) $S = \{15\}$.

6)Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x + y + m.z = 3 \\ 2x + 3y - 5z = -7 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

a)Para que valores de m o sistema é determinado?
b)Resolva o sistema para $m = 0$.

RESOLUÇÃO

a)Para que o sistema seja determinado, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser diferente de zero, isto é:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -11m - 19 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{-19}{11}.$$

b)O sistema a ser resolvido é:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y - 5z = -7 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

Escalonando o referido sistema, obtemos

$$\begin{cases} x + y \qquad = 3 \quad (I) \\ \quad y - 5z = -13 \quad (II) \\ \quad -19z = -57 \quad (III) \end{cases}$$

De (I), obtemos $z = 3$.
Substituindo em (II), $y - 15 = -13 \Rightarrow y = 2$.
Substituindo em (I), $x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$

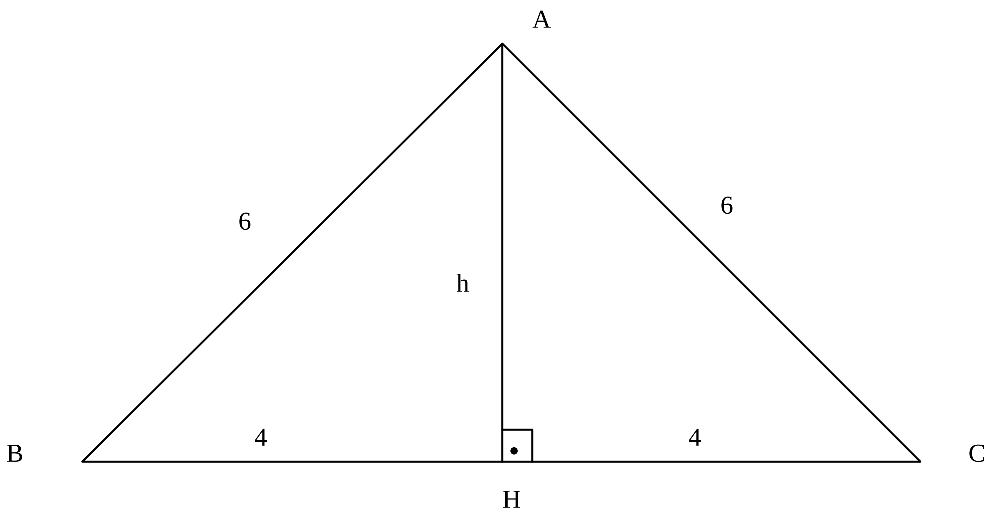
Portanto, a solução é $(1,2,3)$.

Resposta: a) $m \neq \frac{-19}{11}$ b) $S = \{(1,2,3)\}$.

7)a)Os pontos A, B e C são não colineares. A distância de A até B é 6, a de B até C é 8 e a de A até C é 6. Qual a distância de A até a reta que passa por B e C?
b)Qual o período e o conjunto imagem da função $f(x) = 4.\text{sen}\,2x$?

RESOLUÇÃO

a)Os pontos A, B e C formam o triângulo isósceles da figura abaixo:



A distância de A até a reta BC é a medida h da altura AH do triângulo ABC. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo AHC, teremos

$$6^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

b)O período da função é $\dfrac{2p}{2} = p$ (o denominador 2 é o coeficiente de x).

Para obtermos o conjunto imagem, observemos que $\text{sen}\,2x$ varia de –1 a 1; portanto $f(x) = 4.\text{sen}\,2x$ varia de –4 a 4. Assim, o conjunto imagem é o intervalo $[-4;4]$.

Resposta: a) $2\sqrt{5}$ b)Período: p Conjunto imagem: $[-4;4]$.

8)Uma Escola comprou computadores de 3 fabricantes: A, B e C. Trinta por cento foram comprados de A, trinta por cento de B, e o restante de C. A probabilidade de um computador fabricado por A apresentar algum tipo de problema, nos próximos 30 meses, é 0,1. As mesmas probabilidades dos fabricantes B e C são respectivamente 0,15 e 0,2.
a)Qual a probabilidade de que um computador escolhido ao acaso, seja fabricado por A e apresente algum problema nos próximos 30 meses?
b)Se um computador apresentar algum problema nos próximos 30 meses, qual a probabilidade de que tenha sido fabricado por A?

RESOLUÇÃO

a)Sejam A, B e C os eventos correspondentes ao computador ser fabricado pelas empresas A, B e C respectivamente. Seja F a probabilidade do computador apresentar alguma problema no período considerado. Assim, devemos calcular $P(A \cap F)$. Temos:

$$P(A \cap F) = P(A).P(F / A) = (0,3).(0,1) = 0,03.$$

b)Queremos calcular $P(A / F)$.Temos:

$$\begin{aligned} P(A / F) &= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{P(A \cap F)}{P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F)} \\ &= \frac{0,03}{0,03 + (0,3).(0,15) + (0,4).(0,2)} = \frac{0,03}{0,155} = \frac{30}{155}. \end{aligned}$$

Resposta: a)0,03 b) $\frac{30}{155}$.

9)a)Calcule $\sum_{j=1}^{60}(2j-1)$.

b)Obtenha o 20º termo da progressão geométrica $(1,-\frac{x}{2},\frac{x^2}{4},\ldots)$.

RESOLUÇÃO

a) $\sum_{j=1}^{60}(2j-1)=1+3+5+7+\ \ldots\ +119$. Trata-se, portanto, da soma S dos termos de uma Progressão Aritmética, onde $a_1=1,\ a_{60}=119\ \ e\ \ n=60$. Portanto,

$$S=\frac{(a_1+a_{60})}{2}.60=\frac{(1+119)}{2}.60=3600.$$

b)A referida Progressão Geométrica é tal que $a_1=1\ \ e\ \ q=\frac{-x}{2}$ (onde q é a razão). Desta forma, o 20º termo é dado por

$$a_{20}=a_1.q^{19}=1.(\frac{-x}{2})^{19}=-\frac{x^{19}}{2^{19}}.$$

Resposta: a)3600 b) $-\frac{x^{19}}{2^{19}}$.

10)a)Um polinômio P, de coeficientes reais, apresenta $2+3i$ e $-2-3i$ como suas raízes (i é a unidade imaginária). Qual o menor grau possível para P? Justifique.

b)A equação polinomial $x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$ apresenta uma raiz igual a $2+i$. Obtenha as outras raízes.

RESOLUÇÃO

a)Como P apresenta coeficientes reais, se houver um número complexo como raiz, seu conjugado também será raiz. Assim:

- Sendo $2+3i$ raiz, então o número $2-3i$ também será.
- Sendo $-2-3i$ raiz, então o número $-2+3i$ também será.

Como P apresenta pelo menos 4 raízes, seu grau será no mínimo 4.

b)Como a equação apresenta coeficientes reais, e $2+i$ é raiz, então $2-i$ também será. Assim sendo, haverá mais uma raiz que obviamente será real. Seja x_3 esta raiz. Pelas Relações de Girard, devemos ter:

$$(2+i)+(2-i)+x_3 = \frac{-b}{a} = 1 \Rightarrow x_3 = -3.$$

Resposta: a) Demonstração b) –3 .