1ª QUESTÃO

Dois amigos, Alfredo e Bruno, combinam disputar a posse de um objeto num jogo de "cara ou coroa". Alfredo lança 3 moedas e Bruno 2 moedas, simultaneamente.

Vence o jogo e, conseqüentemente, fica com o objeto, aquele que conseguir o maior número de caras. Ocorrendo empate, a experiência será repetida, tantas vezes quantas forem necessárias, até que haja um vencedor.

Calcule:

(a) a probabilidade de que Alfredo vença a disputa na primeira experiência.

(b) a probabilidade de que Alfredo vença a disputa.

RESOLUÇÃO

(a) Alfredo vencerá na primeira experiência, se ocorrer qualquer um dos seguintes resultados:

(1) Alfredo: 3 caras ou

(2) Alfredo: 2 caras e 1 coroa e Bruno: 1 cara e 1 coroa ou

(3) Alfredo: 2 caras e 1 coroa e Bruno: 2 coroas ou

(4) Alfredo: 1 cara e 2 coroas e Bruno: 2 coroas.

deste modo: **P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4)**

$$\left.\begin{aligned} P(1) &= \frac{1}{8} \\ P(2) &= 3.\frac{1}{8}.2.\frac{1}{4} = \frac{6}{32} \\ P(3) &= 3.\frac{1}{8}.\frac{1}{4} = \frac{3}{32} \\ P(4) &= 3.\frac{1}{8}.\frac{1}{4} = \frac{3}{32} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{1}{8} + \frac{6}{32} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}}$$

RESPOSTA

(b) Alfredo vencerá a disputa se conseguir maior número de caras na 1ª experiência; ou na 2ª, ocorrendo empate na 1ª; ou na 3ª, ocorrendo empate nas duas anteriores; ou na 4ª, ocorrendo empate nas 3 anteriores; etc.

Ocorrerá empate, numa das seguintes situações:

(1) Alfredo 2 caras e 1 coroa e Bruno 2 caras ou

(2) Alfredo 1 cara e 2 coroas e Bruno 1 cara ou

(3) Alfredo 3 coroas e Bruno 2 coroas.

deste modo: **P(E) = P(1) + P(2) + P(3)**

$$\left.\begin{aligned} P(1) &= 3.\frac{1}{8}.\frac{1}{4} = \frac{3}{32} \\ P(2) &= \frac{1}{8}.\frac{1}{4} = \frac{1}{32} \\ P(3) &= 3.\frac{1}{8}.2.\frac{1}{4} = \frac{6}{32} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(E) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} + \frac{6}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

Então:

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{5}{16}.\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{16}\right)^2.\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{16}\right)^3.\frac{1}{2} + \ldots = \frac{1}{2}.\left[1 + \frac{5}{16} + \left(\frac{5}{16}\right)^2 + \left(\frac{5}{16}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{2}.\frac{1}{1 - \frac{5}{16}} = \frac{1}{2}.\frac{16}{11} = \frac{8}{11}}$$

RESPOSTA

2ª QUESTÃO

Seja **r** a reta $4x + 7y - 56 = 0$ que intercepta o eixo das ordenadas no ponto **A** e o eixo das abscissas no ponto **B**.

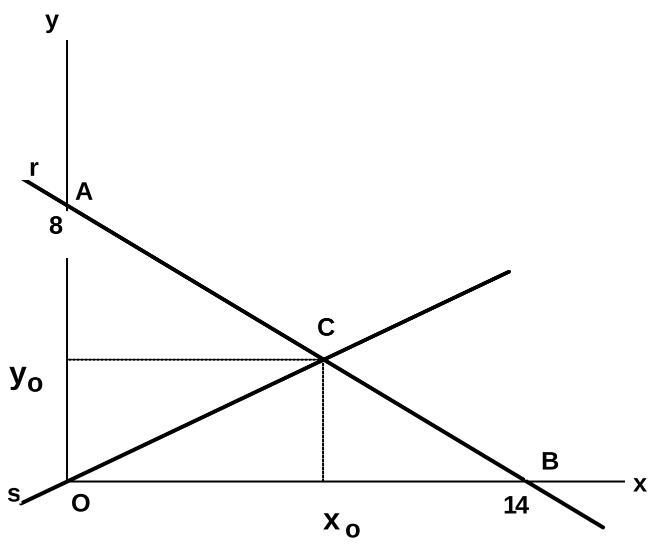
Considere uma reta **s**, que passa pela origem $O(0,0)$ e intercepta a reta **r** no ponto **C**, de modo que a área do triângulo **OCB** seja igual à metade da área do triângulo **OAC**.

(a) Encontre a equação da reta **s**

(b) Determine as coordenadas do ponto **C**.

RESOLUÇÃO

$$C(x_o, y_o)\ ;\ A(0,8)\ ;\ B(14,0)$$



$$\left.\begin{array}{l} A_{\Delta OCB} = \frac{1}{2}.14.y_o \\ A_{\Delta OCA} = \frac{1}{2}.8.x_o \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 7.y_o = \frac{1}{2}.4.x_o \ \Rightarrow\ y_o = \frac{2}{7}x_o$$

$$\textbf{(a)}\ \left.\begin{array}{l} s \rightarrow y = mx \\ C\left(x_o, \frac{2}{7}x_o\right) \in s \end{array}\right\} \Rightarrow\ s \rightarrow y = \frac{2}{7}x$$

$$\textbf{(b)}\ \ C \in r \ \Rightarrow\ 4x_o + 7.\frac{2}{7}x_o - 56 = 0 \ \Rightarrow\ x_o = \frac{28}{3} \ \Rightarrow\ y_o = \frac{8}{3}$$

RESPOSTAS:

(a) $\boxed{\text{reta } s \rightarrow y = \frac{2}{7}x}$

(b) $\boxed{C\left(\frac{28}{3}, \frac{8}{3}\right)}$

3ª QUESTÃO

Considere o sistema linear nas incógnitas **x**, **y** e **z** :

$$\begin{cases} x - 2y - z = 8 \\ 2x + y + 3z = -2 \\ ax + y + 2z = 8 \end{cases}$$

(a) Encontre o valor de **a** que torna o sistema impossível ou indeterminado.

(b) Utilize o valor de **a** encontrado no item anterior para verificar se o sistema dado é impossível ou indeterminado.

RESOLUÇÃO

(a) Para que o sistema seja impossível ou indeterminado, é necessário que o determinante (D) da matriz dos coeficientes do sistema linear dado seja igual a zero.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1+2a & 2+a \end{vmatrix} = 5.(2 + a - 1 - 2a)$$

$$D = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

(b) $\begin{cases} x - 2y - z = 8 \\ 2x + y + 3z = -2 \\ x + y + z = 8 \end{cases}$

por escalonamento, encontra-se o sistema equivalente : $\begin{cases} x - 2y - z = 8 \\ 5y + 5z = -18 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$

Então, para **a = 1**, o sistema linear é **impossível.**

RESPOSTAS:

(a) **SISTEMA IMPOSSÍVEL OU INDETERMINADO PARA a = 1**

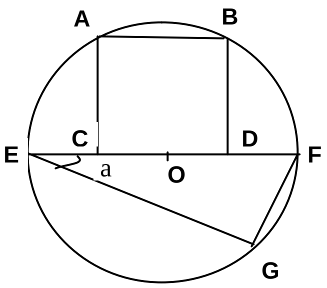
(b) **SE a = 1, O SISTEMA É IMPOSSÍVEL**

4ª QUESTÃO

Na figura ao lado, **ABCD** é quadrado de área $80\,cm^2$; **EF** é diâmetro da circunferência de centro **O** e a medida do ângulo $\alpha\,(F\hat{E}G)$ é 30º.

$(\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OE} = \overline{OF} = \overline{OG})$

Determine a área do triângulo **EFG**.



RESOLUÇÃO

Seja **x** a medida do lado do quadrado **ABCD.**

$$x^2 = 80 \Rightarrow x = 4\sqrt{5}$$

No triângulo retângulo **OBD**, temos: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 = r^2 \Rightarrow r = \frac{x\sqrt{5}}{2}$ Logo $r = 10$.

O triângulo **EFG**, inscrito na semi-circunferência, é retângulo. Então:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\overline{FG}}{\overline{EF}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{FG}}{20} \Rightarrow \overline{FG} = 10$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{EG}}{20} \Rightarrow \overline{EG} = 10\sqrt{3}$$

Desse modo, a área – **S** – do triângulo **EFG** será dada por:

$$S = \frac{1}{2}.\overline{FG}.\overline{EG} \Rightarrow S = \frac{10.10\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

RESPOSTA

$$\boxed{S = 50\sqrt{3}\,cm^2}$$

5ª QUESTÃO

(a) A equação $2x^3 - 8x^2 + mx + 16 = 0$, sendo **m** um número real, tem raízes **a**, **b** e **c**, tais que: $a = b + c$.

Determine o valor de **S**, tal que $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{b}{ac}$.

RESOLUÇÃO

$(1)\ a + b + c = 4$

$(2)\ a.b + a.c + b.c = \frac{m}{2}$ $\qquad (4)\ \text{em } (1) \rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$

$(3)\ a.b.c = -8$

$(4)\ a = b + c$

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{b}{ac} = \frac{b.c + a.c + b^2}{a.b.c} = \frac{b.(c+b) + a.c}{a.b.c} = \frac{b.a + a.c}{a.b.c} = \frac{a.(b+c)}{a.b.c}$$

$$S = \frac{a^2}{a.b.c} = \frac{2^2}{-8} \Rightarrow \boxed{S = -\frac{1}{2}} \rightarrow \text{RESPOSTA}$$

(b) O polinômio $P(x) = 3x^4 - 22x^3 + 64x^2 - 58x + 13$ é divisível por $\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

Encontre as raízes da equação $P(x) = 0$ no conjunto dos números complexos.

RESOLUÇÃO

Utilizando o algorítmo de Briot-Ruffini, para divisão por binômio de 1º grau, temos:

$\frac{1}{3}$	3	-22	64	-58	13
	3	-21	57	-39	0

A soma dos coeficientes do polinômio quociente é zero.

Logo, o quociente da divisão é divisível por **(x – 1)**. Então:

1	3	-21	57	-39
	3	-18	39	0

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right).(x-1).\left(3x^2 - 18x + 39\right);$$

$$P(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 39 = 0$$

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm 4i}{2} \Rightarrow x = 2 \pm 3i$$

RESPOSTA $\qquad \boxed{S = \left\{\frac{1}{3}; 1; 2 - 3i; 2 + 3i\right\}}$

6ª QUESTÃO

O gerente de produção de uma indústria construiu a tabela ao lado, relacionando a produção dos operários com sua experiência.

Experiência (meses)	**0**	**6**
Produção (unidades por hora)	**200**	**350**

Acredita o gerente que a produção **Q** se relaciona à experiência **t**, através da função $\mathbf{Q(t) = 500 - A.e^{-k.t}}$, sendo **e** = 2,72 e **k** um número real, positivo.

(a) Considerando que as projeções do gerente de produção dessa indústria estejam corretas, quantos meses de experiência serão necessários para que os operários possam produzir 425 unidades por hora?

(b) Desse modo, qual será a máxima produção possível dos operários dessa empresa?

RESOLUÇÃO

(a) Considerando a função $\mathbf{Q(t) = 500 - A.e^{-k.t}}$ e os dados da tabela, temos:

$$Q(0) = 200 = 500 - A.e^{0} \Rightarrow A = 300$$

$$Q(6) = 350 = 500 - 300.e^{-k.6} \Rightarrow e^{-6k} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/6}$$

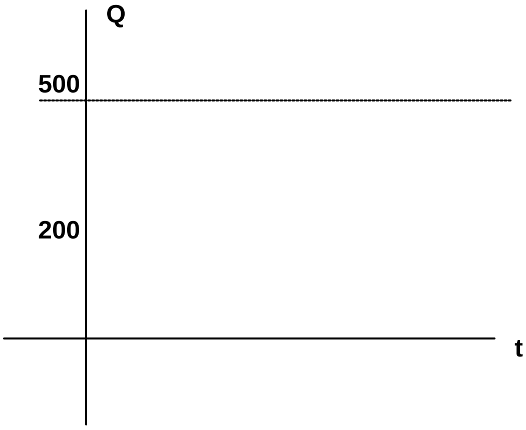
$$Q(t) = 425 = 500 - 300.\left(e^{-k}\right)^{t} \Rightarrow 75 = 300.\left(\frac{1}{2}\right)^{t/6}$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/6} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/6} \Leftrightarrow 2 = \frac{t}{6} \Rightarrow t = 12$$

RESPOSTA

OS OPERÁRIOS ATINGIRÃO O NÍVEL DE PRODUÇÃO DE 425 UNIDADES POR HORA, COM 12 MESES DE EXPERIÊNCIA.

(b) Seja a função $\mathbf{Q(t) = 500 - 300.\left(\frac{1}{2}\right)^{t/6}}$ cuja porção relevante ($\mathbf{t > 0}$) do gráfico está representada abaixo.



RESPOSTA

A MÁXIMA PRODUÇÃO POSSÍVEL DOS OPERÁRIOS DESSA EMPRESA SERÁ DE 500 UNIDADES POR HORA.

7ª QUESTÃO

a) Determine, no plano de Argand-Gauss, o lugar geométrico dos números complexos **z** representados pela equação: $\mathbf{z.\bar{z} - w.\bar{z} - \bar{w}.z + 25 = 0}$, sendo $\mathbf{w = -2 + 5i}$.

RESOLUÇÃO

$$z = x + yi \; ; \; w = -2 + 5i$$

$$z.\bar{z} - w.\bar{z} - \bar{w}.z + 25 = (x+yi).(x-yi) - (-2+5i).(x-yi) - (-2-5i).(x+yi) = 0$$

$$x^2 + y^2 - (-2).(x - yi + x + yi) + 5i.(-x + yi + x + yi) + 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 5i.(2yi) + 25 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 5y + 25 = 0$$

$$x^2 + 2x + 4 + y^2 - 5y + 25 = 4 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-5)^2 = 4$$

RESPOSTA

O LUGAR GEOMÉTRICO DOS COMPLEXOS Z QUE OBEDECEM A CONDIÇÃO DADA É UMA CIRCUNFERÊNCIA DE CENTRO EM W (– 2, 5) E RAIO IGUAL A 2.

b) De todos os números complexos **z** de módulo 3, determine aqueles que satisfazem a igualdade $|z - 2i| = \sqrt{3}.|i - 2|$

RESOLUÇÃO

$$z = x + yi \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

$$z - 2i = x + (y-2)i \Rightarrow |z - 2i| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

$$|i - 2| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$|z - 2i| = \sqrt{3}.|i - 2| \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{3}.\sqrt{5}$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 15 \Rightarrow -4y = 15 - 13 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{35}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{35}}{2}$$

RESPOSTA

$$\boxed{z = -\frac{\sqrt{35}}{2} - \frac{i}{2} \text{ ou } z = \frac{\sqrt{35}}{2} - \frac{i}{2}}$$

8ª QUESTÃO

(a) Um televisor, cujo preço à vista é R$1.000,00, está sendo vendido, a prazo, em 3 parcelas mensais, sucessivas e iguais a R$350,00, sem entrada.

João Augusto tem R$1.000,00 aplicados à taxa de 2% ao mês, pelo critério de juros compostos, mas preferiu comprar o televisor a prazo. “Levo o televisor sem gastar nada agora e, ainda, mantenho o dinheiro aplicado. Pagarei as parcelas com retiradas mensais da aplicação”, pensou ele.

João Augusto raciocinou corretamente? Haverá dinheiro suficiente na aplicação para saldar a última parcela do financiamento?

RESOLUÇÃO

Supondo o dinheiro aplicado à taxa de 2% ao mês com retiradas mensais e consecutivas de R$350,00, teremos:

1º mês: $1.000{,}00.(1{,}02) - 350{,}00 = 1.020{,}00 - 350{,}00 = 670{,}00$

2º mês: $670{,}00.(1{,}02) - 350{,}00 = 683{,}40 - 350{,}00 = 333{,}40$

3º mês: $333{,}40.(1{,}02) - 350{,}00 = 340{,}07 - 350{,}00 = -9{,}93$

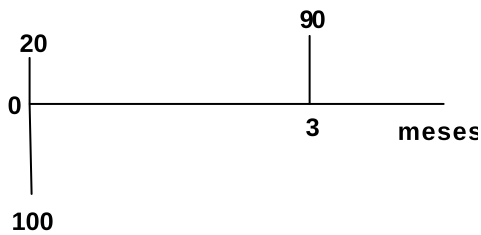
RESPOSTA

O RACIOCÍNIO DE JOÃO AUGUSTO NÃO FOI CORRETO, POIS A APLICAÇÃO NÃO FOI SUFICIENTE PARA SALDAR TODAS AS PARCELAS DO FINANCIAMENTO. DEVERÁ DESEMBOLSAR R$9,93 PARA PAGAR A ÚLTIMA PARCELA.

(b) Certa loja tem como política de vendas a crédito exigir, como entrada, 20% do valor à vista da mercadoria e o restante a ser liquidado no final de 3 meses. Neste caso, o saldo devedor é acrescido de 10% do valor à vista da mercadoria, a título de “despesas administrativas”. Qual é a taxa anual de juros simples cobrada por esta loja?

RESOLUÇÃO

Considerando como 100 o valor da mercadoria, pagando-se 20 no ato da compra, o valor financiado será 80. Como ao saldo devedor será acrescido 10 (10% de 100), no final do 3º mês será feito um pagamento de 90, como pode ser observado no diagrama de fluxo de caixa ao lado.



Desse modo, podemos calcular a taxa de juros i_t do trimestre:

$$i_t = \frac{90}{80} - 1 = 0{,}125$$

A taxa i_a anual de juros simples é proporcional à taxa do trimestre. Logo

$$i_a = (0{,}125).4 = 0{,}50$$

RESPOSTA

A TAXA DE JUROS SIMPLES COBRADA PELA LOJA É DE 50% AO ANO.

9ª QUESTÃO

Denomina-se "desconto na fonte" o Imposto de Renda (IR) pago pelos empregados brasileiros com registro em carteira de trabalho, mediante desconto diretamente da sua remuneração mensal.

Para valores de salário referência maiores que R\$2.115,00, o cálculo do desconto de IR na fonte é feito através da seguinte equação:

$$\mathbf{IR} = (\mathbf{salário\ referência}).(\mathbf{0{,}275}) - \mathbf{423{,}08}$$

Obtém-se o valor de salário referência (SR), deduzindo-se do salário bruto os valores referentes ao gasto com dependentes (R\$106,00 para cada um) e à contribuição ao INSS (11% sobre o valor teto de R\$1.869,39), conforme a expressão seguinte:

$$\mathbf{SR} = (\mathbf{salário\ bruto}) - (\mathbf{1.869{,}39}).(\mathbf{0{,}11}) - (\mathbf{n^o\ de\ dependentes}).(\mathbf{106{,}00})$$

(a) Considere que João da Silva, analista de marketing de uma grande empresa do setor alimentício, foi contratado e registrado com um salário bruto de R\$3.523,63 e tem três dependentes. Quanto é descontado do seu salário, mensalmente, a título de Imposto de Renda na fonte?

RESOLUÇÃO

$$\mathbf{SR} = (\mathbf{3.523{,}63}) - (\mathbf{1.869{,}39}).(\mathbf{0{,}11}) - (\mathbf{1}).(\mathbf{106{,}00})$$

$$\mathbf{SR} = (\mathbf{3.523{,}63}) - (\mathbf{205{,}63}) - (\mathbf{318{,}00}) \Rightarrow \mathbf{SR} = \mathbf{3.000{,}00}$$

$$\mathbf{IR} = (\mathbf{3.000{,}00}).(\mathbf{0{,}275}) - \mathbf{423{,}08} = \mathbf{825{,}00} - \mathbf{423{,}08}$$

$$\mathbf{IR} = \mathbf{R\$401{,}92}$$

(b) Entende-se por salário líquido (SL) o valor efetivamente recebido pelo assalariado, isto é, deduzindo-se do salário bruto a contribuição ao INSS (11% sobre R\$1.869,39) e o desconto do IR na fonte.

Considerando que em um ano de trabalho são efetuados 12 descontos de IR na fonte, calcule o número aproximado de meses de salário líquido do João da Silva que são devorados pelo "leão" da receita federal brasileira.

RESOLUÇÃO

$$\mathbf{SL} = (\mathbf{3.523{,}63}) - (\mathbf{205{,}63}) - (\mathbf{401{,}92}) \Rightarrow \mathbf{SL} = \mathbf{2.916{,}08}$$

$$(\mathbf{401{,}92}).\mathbf{12} = \mathbf{4.823{,}04}$$

$$\boxed{\frac{\mathbf{4.823{,}04}}{\mathbf{2.916{,}08}} \cong \mathbf{1{,}65}}$$

RESPOSTAS

(a) **O DESCONTO MENSAL DE IR NA FONTE SERÁ DE R\$401,92**

(b) **O "LEÃO" DA RECEITA FEDERAL DEVORA, APROXIMADAMENTE, 1,65 SALÁRIOS DO JOÃO DA SILVA POR ANO.**

10ª QUESTÃO

É dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

(a) Se $B = A^t - \frac{3}{2}A$, onde A^t a matriz transposta de **A** e $B = \begin{bmatrix} \frac{y}{x} & -10 & 5x+7y \\ \frac{15}{2} & \frac{x}{y} & \frac{7}{2} \\ 2 & \frac{3y}{x} & 3x+7y \end{bmatrix}$,

determine o número real **w**, tal que $w = |x.y|$

RESOLUÇÃO

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -9 & -3 \\ \frac{3}{2} & -6 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -10 & -3 \\ \frac{15}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{x} & -10 & 5x+7y \\ \frac{15}{2} & \frac{x}{y} & \frac{7}{2} \\ 2 & \frac{3y}{x} & 3x+7y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 7y = -3 \rightarrow (1) \\ 3x + 7y = 1 \rightarrow (2) \end{cases} \qquad \begin{aligned} &(1) - (2) \rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2 \\ &(2) \rightarrow -6 + 7y = 1 \Rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{w = |x.y| \Rightarrow w = |-2|}$$

RESPOSTA

$$\boxed{w = 2}$$

(b) Considere a matriz **C**, tal que $C = -\frac{3}{2}A^t$. Encontre o valor do número real **p**, sendo **p** o determinante da matriz $C.A^{-1}$, isto é, $p = \det(C.A^{-1})$ e A^{-1} a matriz inversa da matriz **A**.

$$\det(C.A^{-1}) = \det(C).\det(A^{-1}) = \det(C).\frac{1}{\det(A)} = p$$

$$\det(C) = \det\left(-\frac{3}{2}A^t\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3.\det(A) \qquad \Rightarrow p = \left(-\frac{3}{2}\right)^3.\det(A).\frac{1}{\det(A)}$$

RESPOSTA

$$\boxed{p = -\frac{27}{8}}$$