01. Considere, no plano cartesiano, os pontos **P(0,1)** e **Q(2,3)**.

A) Determine uma equação para a **reta mediatriz** do segmento de reta $\overline{\mathbf{PQ}}$.

B) Determine uma equação para o **círculo**, com centro no eixo-x, que contém os pontos **P** e **Q**.

Questão 01

A) A reta mediatriz do segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ é o conjunto dos pontos **X** do plano que satisfazem a igualdade $\mathbf{d(X,P) = d(X,Q)}$. Se **X(x,y)** é um ponto da mediatriz, então,

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}\,.$$

Daí, segue que

$$-2y + 1 = -4x - 6y + 13 \qquad \text{ou} \qquad x + y = 3\,.$$

Essa é a equação da reta mediatriz do segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$.

B) Um círculo que passa pelos pontos **P** e **Q** tem centro sobre a reta mediatriz do item **(a)** acima. Como o centro **C** deve estar sobre o eixo-x, suas coordenadas devem ser **(c,0).** Logo, $\mathbf{c + 0 = 3}$, isto é, o centro do círculo em consideração é o ponto **C(3,0)**. O raio do círculo é a distancia entre os pontos **P** e **C** (ou entre os pontos **Q** e **C**). Assim, o raio **r** do círculo é:

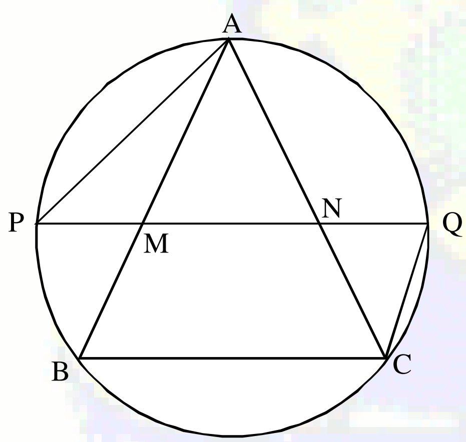
$$r = d(P,C) = \sqrt{(0-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}\,;$$
$$r = d(Q,C) = \sqrt{(2-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}\,.$$

Portanto, a equação do círculo é: $(x-3)^2 + y^2 = 10$.

02. Na figura abaixo, **ABC** é um triângulo eqüilátero inscrito num círculo. A corda $\overline{\mathbf{PQ}}$ corta os lados **AB** e **AC** nos seus pontos médios **M** e **N**, respectivamente. Cada segmento de reta $\overline{\mathbf{PM}}$ e $\overline{\mathbf{PN}}$ mede **1 u.c**. (unidade de comprimento). Assim, responda as duas questões que se seguem.

A) Considere os triângulos **APN** e **QCN**. Prove que eles são semelhantes.

B) Quantas **u.c**. tem o lado do triângulo **ABC**?



Questão 02

A) No triângulo **APN** denote por ***a, p*** e ***n***, as medidas dos ângulos nos vértices **A, P** e **N**, respectivamente. No triângulo **QCN** sejam ***q, c*** e **n** as medidas dos ângulos nos vértices **Q, C** e **N**, respectivamente. Temos ***a = q***, pois são ângulos inscritos num círculo, determinando um mesmo arco. Analogamente, ***p = c*** pela mesma razão. Logo, os triângulos **APN** e **QCN** são semelhantes, pois têm os ângulos correspondentes com a mesma medida, isto é, **congruentes.** É o caso **ângulo,ângulo,ângulo (AAA),** de semelhança de triângulos.

B) Como **M** e **N** são pontos médios dos lados, então, o triângulo **AMN** é eqüilátero e o seu lado tem medida igual à metade da medida do lado do triângulo **ABC**. Seja $\mathbf{x = \overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NA}}$ a medida do lado do triângulo **AMN**. Devemos encontrar o valor de $\mathbf{2x}$. Da semelhança dos triângulos APN e QCN, obtemos as relações

$$(*) \qquad \mathbf{\frac{\overline{AP}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{QN}}}.$$

Mas $\mathbf{\overline{PN} = \overline{PM} + \overline{MN} = 1 + x}$, $\mathbf{\overline{CN} = x}$, $\mathbf{\overline{AN} = x}$ e $\mathbf{\overline{QN} = 1}$. Portanto, a última igualdade nas relações $(*)$ fornece

$$\mathbf{\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1}},$$

ou $\mathbf{x^2 - x - 1 = 0}$. Como $\mathbf{x}$ é positivo, então, $\mathbf{x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Daí, resulta $\mathbf{2x = 1 + \sqrt{5}}$, que é a medida do lado do triângulo **ABC**.

03.

A) Determine constantes reais **a**, **r**, **s** tais que a igualdade $\mathbf{3x^2 - 7x + 2 = a(x - r)(x - s)}$ seja verdadeira para todo **x** real.

B) Determine constantes reais **p**, **q**, **r**, **s** tais que a igualdade $\mathbf{\dfrac{x-1}{3x^2-7x+2} = \dfrac{p}{x-r} + \dfrac{q}{x-s}}$ seja válida para todo real $\mathbf{x \notin \{r,s\}}$

Questão 03

A) As raízes do polinômio $\mathbf{3x^2 - 7x + 2}$ são **1/3** e **2.** Logo,

$$3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}\right) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2).$$

Assim, $\mathbf{a = 3}$, $\mathbf{r = \frac{1}{3}}$ e $\mathbf{s = 2}$.

B) Temos

$$\frac{x-1}{3x^2 - 7x + 2} = \frac{x-1}{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-2)} = \frac{\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}}{\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-2)} = \frac{p}{\left(x - \frac{1}{3}\right)} + \frac{q}{(x-2)}.$$

A última igualdade acima implica que

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = p(x-2) + q\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Igualando coeficientes, obtemos o sistema em **p** e **q**

$$\begin{cases} p + q = \dfrac{1}{3} \\ 6p + q = 1 \end{cases},$$

cuja solução é $\mathbf{p = \frac{2}{15}}$ **e** $\mathbf{q = \frac{3}{15}}$.

04. Dois produtos químicos **P** e **Q** são usados em um laboratório. Cada grama do produto **P** custa R$ 0,03, e cada grama do produto **Q** custa R$ 0,05. Se 100 gramas de uma mistura dos dois produtos custa R$ 3,60, determine a quantidade, em gramas, do produto **P** presente na mistura.

05. Se α é a medida dos ângulos da base de um **triângulo isósceles** e $\mathbf{sen\alpha = \frac{1}{4}}$, determine o valor da tangente do ângulo do vértice desse triângulo.

Questão 04

Sejam **x** e **y**, respectivamente, as quantidades em gramas dos produtos P e Q, presentes na mistura de 100 gramas. Como a mistura de 100 gramas custou R$ 3,60 , temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 0,03x+0,05y=3,60 \end{cases}.$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 3x+5y=360 \end{cases},$$

cuja solução é $x=70$ e $y=30$. Portanto, há **70** gramas do produto P na mistura.

Questão 05

Consideremos as medidas em radianos. Se β é a medida em radianos do ângulo do vértice, então, $\beta=\pi-2\alpha$. Portanto,

$$\tan\beta=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}=\frac{\operatorname{sen}(\pi-2\alpha)}{\cos(\pi-2\alpha)}=\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{-\cos 2\alpha}=-\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}.$$

Como $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{4}$, então, $\cos\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Substituindo esses valores na última expressão acima, obtemos

$$\tan\beta=-\frac{2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{15}{16}-\frac{1}{16}}=-\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

06.

A) Considere a função $\mathbf{f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}}$, cujo domínio é o conjunto dos números reais não nulos. Calcule $\mathbf{f(c)}$, onde $\mathbf{c}$ é um número real tal que $\mathbf{c + \frac{1}{c} = 5}$.

B) Considere a função $\mathbf{g(x) = x^4 + \frac{1}{x^4}}$, cujo domínio é o conjunto dos números reais não nulos. Calcule $\mathbf{g(c)}$, onde $\mathbf{c}$ é um número real tal que $\mathbf{c + \frac{1}{c} = 5}$.

Questão 06

A) Se $\mathbf{c+\frac{1}{c}=5}$, então,

$$\mathbf{f(c)=c^2+\frac{1}{c^2}=\left(c+\frac{1}{c}\right)^2-2=25-2=23}.$$

Portanto, $\mathbf{f(c)=23}$.

B) Observe que $\mathbf{g(x)=x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=f(x)^2-2}$.

Portanto, $\mathbf{g(c)=f(c)^2-2=23^2-2=529-2=527}$.

07.

A) Seja $\mathbf{i}$ a unidade imaginária dos números complexos. Sabe-se que $\mathbf{i^2 = -1}$. Se o número inteiro positivo $\mathbf{N}$ é tal que $\mathbf{i^N = -1}$, determine o resto da divisão de $\mathbf{N}$ por 4.

B) Os números complexos $\mathbf{z = 1 + i\sqrt{3}}$ e $\mathbf{w = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\ sen\,\theta)}$, com $\mathbf{r = |\ w\ |}$ e $\mathbf{0 \leq \theta < 2\pi}$, satisfazem a equação $\mathbf{z \cdot \bar{w} = 1}$. Determine $\mathbf{r}$ e $\boldsymbol{\theta}$.

Questão 07

A) Dado um inteiro **N**, existem únicos inteiros $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$, com $\mathbf{r \in \{0,1,2,3\}}$, tais que $\mathbf{N = 4q + r}$.

Se $\mathbf{i^2 = -1}$, então, $\mathbf{i^3 = -i}$ e $\mathbf{i^4 = 1}$. Portanto,

$$\mathbf{-1 = i^N = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r} \quad .$$

O único inteiro $\mathbf{r \in \{0,1,2,3\}}$ que satisfaz a igualdade acima é $\mathbf{r = 2}$. Logo, o resto da divisão de **N** por 4 é 2.

B) Temos $\mathbf{|z|^2 = 4}$, $\mathbf{\overline{w} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i}$.

Assim, $\mathbf{w = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(\pi/3) + sen\,(\pi/3) i\right) = \frac{1}{2} e^{i\pi/3}}$ e, portanto,

$\mathbf{r = 1/2}$ e $\mathbf{\theta = \frac{\pi}{3}}$.

08. Uma substância radioativa de massa inicial $\mathbf{M_0}$ se transforma em outra substância não radioativa. Para cada instante $\mathbf{t \geq 0}$, dado em segundos, a massa $\mathbf{M(t)}$ da substância radioativa restante obedece à lei $\mathbf{M(t) = M_0 3^{-2t}}$. Nessas condições, determine o tempo, em segundos, necessário para que a massa da substância radioativa seja reduzida a um terço da massa inicial.

Questão 08

Seja $\mathbf{t_1}$ o tempo em segundos para que $\mathbf{M(t_1) = \frac{1}{3}M_0}$. Devemos calcular $\mathbf{t_1}$. Mas

$$\mathbf{\frac{1}{3}M_0 = M(t_1) = M_0 3^{-2t_1}}.$$

Logo,

$$\mathbf{\frac{1}{3} = 3^{-2t_1} \qquad \frac{1}{3} = 3^{-2t_1} \Leftrightarrow 3^{-1} = 3^{-2t_1} \Leftrightarrow 2t_1 = 1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{2}}.$$