unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

# VESTIBULAR 2006

Nome do candidato

Número da carteira

## Área de Ciências Exatas

# PROVA DE CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS

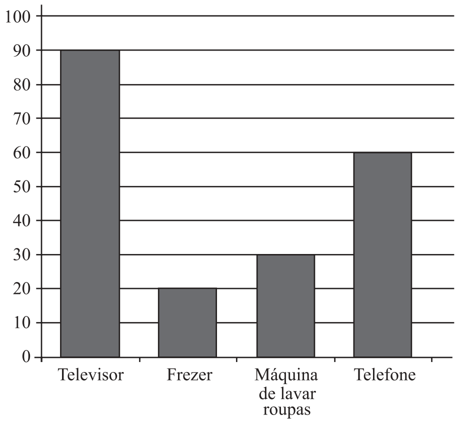
## CADERNO DE QUESTÕES

### INSTRUÇÕES

1. Dobrar este caderno ao meio e cortá-lo na parte superior.
2. Preencher com seu nome e número da carteira os espaços indicados nesta página.
3. Assinar com caneta de tinta azul ou preta a capa do seu Caderno de Respostas, no local indicado.
4. Esta prova contém 25 questões e terá duração de 4 horas.
5. O candidato somente poderá entregar o Caderno de Respostas e sair do prédio depois de transcorridas 2 horas, contadas a partir do início da prova.
6. Ao sair, o candidato levará este caderno e o caderno de questões da Prova de Conhecimentos Gerais.

## MATEMÁTICA

**01.** O gráfico mostra, aproximadamente, a porcentagem de domicílios no Brasil que possuem certos bens de consumo. Sabe-se que o Brasil possui aproximadamente 50 milhões de domicílios, sendo 85% na zona urbana e 15% na zona rural.



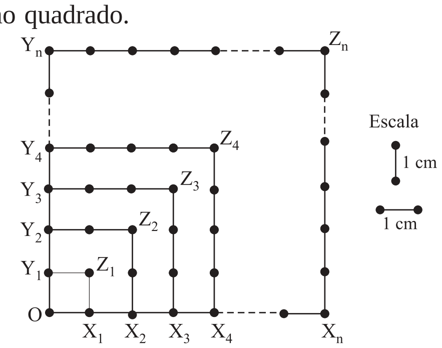

(IBGE)

Admita que a distribuição percentual dos bens, dada pelo gráfico, mantenha a proporcionalidade nas zonas urbana e rural.

**a)** Escrevendo todos os cálculos efetuados, determine o número de domicílios da zona rural e, dentre esses, quantos têm máquina de lavar roupas e quantos têm televisor, *separadamente*.

**b)** Considere os eventos T: o domicílio tem telefone e F: o domicílio tem freezer. Supondo independência entre esses dois eventos, calcule a probabilidade de ocorrer T *ou* F, isto é, calcule $P(T \cup F)$. Com base no resultado obtido, calcule quantos domicílios da zona urbana têm telefone *ou* freezer.

**02.** Considere a figura, onde estão sobrepostos os quadrados $OX_1Z_1Y_1$, $OX_2Z_2Y_2$, $OX_3Z_3Y_3$, $OX_4Z_4Y_4$,..., $OX_nZ_nY_n$,..., $n \geq 1$, formados por pequenos segmentos medindo 1 cm cada um. Sejam $A_n$ e $P_n$ a área e o perímetro, respectivamente, do n-ésimo quadrado.




**a)** Mostre que a seqüência $(P_1, P_2, ..., P_n, ...)$ é uma progressão aritmética, determinando seu termo geral, em função de n, e sua razão.

**b)** Considere a seqüência $(B_1, B_2, ..., B_n, ...)$, definida por $B_n = \frac{A_n}{P_n}$. Calcule $B_1$, $B_2$ e $B_3$. Calcule, também, a soma dos 40 primeiros termos dessa seqüência, isto é, $B_1 + B_2 + ... + B_{40}$.

**03.** Sejam $A = \begin{bmatrix} x-2y & 1 \\ 3x+y & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ matrizes reais.

**a)** Calcule o determinante de A, det(A), em função de x e y, e represente no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) que satisfazem a inequação $\det(A) \leq \det(B)$.

**b)** Determine x e y reais, de modo que $A + 2B = C$.

**04.** Seja $z = 1 + i$ um número complexo.

**a)** Escreva $z$ e $z^3$ na forma trigonométrica.

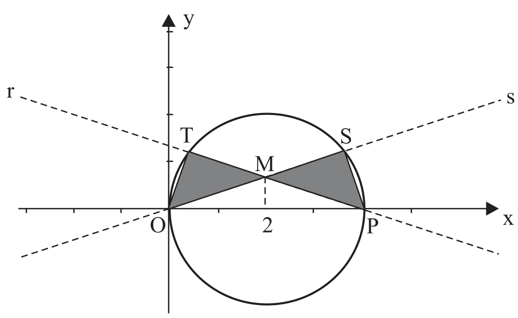
**b)** Determine o polinômio de coeficientes reais, de menor grau, que tem $z$ e $|z|^2$ como raízes e coeficiente dominante igual a 1.

**05.** Considere o número inteiro 3 600, cuja fatoração em primos é $3\,600 = 2^4.3^2.5^2$. Os divisores inteiros e positivos de 3 600 são os números da forma $2^\alpha.3^\beta.5^\gamma$, com $\alpha \in \{0,1,2,3,4\}$, $\beta \in \{0,1,2\}$ e $\gamma \in \{0,1,2\}$. Determine:

**a)** o número total de divisores inteiros e positivos de 3 600 e quantos desses divisores são também divisores de 720.

**b)** quantos dos divisores inteiros e positivos de 3 600 são pares e quantos são quadrados perfeitos.

**06.** Seja C a circunferência de centro (2, 0) e raio 2, e considere O e P os pontos de interseção de C com o eixo Ox. Sejam T e S pontos de C que pertencem, respectivamente, às retas r e s, que se interceptam no ponto M, de forma que os triângulos OMT e PMS sejam congruentes, como mostra a figura.




**a)** Dê a equação de C e, sabendo que a equação de s é $y = \frac{x}{3}$, determine as coordenadas de S.

**b)** Calcule as áreas do triângulo OMP e da região sombreada formada pela união dos triângulos OMT e PMS.

**07.** Considere as funções $f(x) = -5 + \log_2(1-x)$, definida para $x < 1$, e $g(x) = x^2 - 4x - 4$, definida para todo x real.

**a)** Resolva a inequação $f(x) \leq g(4)$ e a equação $g(x) = f(7/8)$.

**b)** Determine o domínio da função composta $f \circ g$, isto é, os valores de $x \in R$ para os quais $f \circ g$ está definida. Determine também em qual valor de x a composta $f \circ g$ atinge seu valor máximo.

**08.** A figura mostra a órbita elíptica de um satélite S em torno do planeta Terra. Na elipse estão assinalados dois pontos: o ponto A (apogeu), que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra, e o ponto P (perigeu), que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra. O ponto O indica o centro da Terra e o ângulo PÔS tem medida $\alpha$, com $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$.

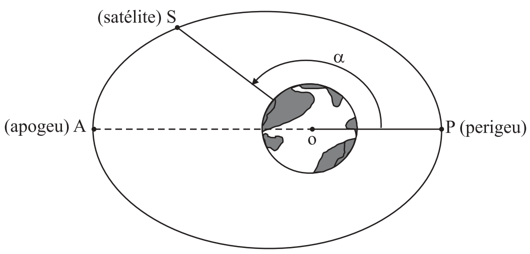



Figura fora de escala

A altura h, em km, do satélite à superfície da Terra, dependendo do ângulo $\alpha$, é dada aproximadamente pela função

$$h = \left(-64 + \frac{7\,980}{100 + 5\cos\alpha}\right) \times 10^2 .$$

Determine:

**a)** A altura h do satélite quando este se encontra no perigeu e também quando se encontra no apogeu.

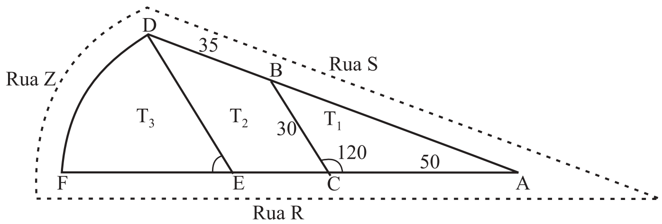
**b)** os valores de $\alpha$, quando a altura h do satélite é de 1 580 km.

**09.** Com um recipiente de vidro fino transparente na forma de um paralelepípedo reto-retângulo, que tem como base um quadrado cujo lado mede 15 cm e a aresta da face lateral mede 40 cm, Márcia montou um enfeite de natal. Para tanto, colocou no interior desse recipiente 90 bolas coloridas maciças de 4 cm de diâmetro cada e completou todos os espaços vazios com um líquido colorido transparente. Desprezando-se a espessura do vidro e usando (para facilitar os cálculos) a aproximação $\pi = 3$,

**a)** dê, em $cm^2$, a área lateral do recipiente e a área da superfície de cada bola.

**b)** dê, em $cm^3$, o volume do recipiente, o volume de cada esfera e o volume do líquido dentro do recipiente.

**10.** Dois terrenos, $T_1$ e $T_2$, têm frentes para a rua R e fundos para a rua S, como mostra a figura. O lado BC do terreno $T_1$ mede 30 m e é paralelo ao lado DE do terreno $T_2$. A frente AC do terreno $T_1$ mede 50 m e o fundo BD do terreno $T_2$ mede 35 m. Ao lado do terreno $T_2$ há um outro terreno, $T_3$, com frente para a rua Z, na forma de um setor circular de centro E e raio ED.




Determine:

**a)** as medidas do fundo AB do terreno $T_1$ e da frente CE do terreno $T_2$.

**b)** a medida do lado DE do terreno $T_2$ e o perímetro do terreno $T_3$.

## FÍSICA

**11.** Uma composição de metrô deslocava-se com a velocidade máxima permitida de 72 km/h, para que fosse cumprido o horário estabelecido para a chegada à estação A. Por questão de conforto e segurança dos passageiros, a aceleração (e desaceleração) máxima permitida, em módulo, é 0,8 $m/s^2$. Experiente, o condutor começou a desaceleração constante no momento exato e conseguiu parar a composição corretamente na estação A, no horário esperado. Depois de esperar o desembarque e o embarque dos passageiros, partiu em direção à estação B, a próxima parada, distante 800 m da estação A. Para percorrer esse trecho em tempo mínimo, impôs à composição a aceleração e desaceleração máximas permitidas, mas obedeceu a velocidade máxima permitida. Utilizando as informações apresentadas, e considerando que a aceleração e a desaceleração em todos os casos foram constantes, calcule

**a)** a distância que separava o trem da estação A, no momento em que o condutor começou a desacelerar a composição.

**b)** o tempo gasto para ir da estação A até a B.

**12.** Um garoto, voltando da escola, encontrou seus amigos jogando uma partida de futebol no campinho ao lado de sua casa e resolveu participar da brincadeira. Para não perder tempo, atirou sua mochila por cima do muro, para o quintal de sua casa: postou-se a uma distância de 3,6 m do muro e, pegando a mochila pelas alças, lançou-a a partir de uma altura de 0,4 m. Para que a mochila passasse para o outro lado com segurança, foi necessário que o ponto mais alto da trajetória estivesse a 2,2 m do solo. Considere que a mochila tivesse tamanho desprezível comparado à altura do muro e que durante a trajetória não houve movimento de rotação ou perda de energia. Tomando g = 10 m/s$^2$, calcule

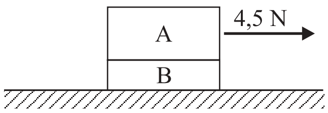
**a)** o tempo decorrido, desde o lançamento, para a mochila atingir a altura máxima.

**b)** o ângulo de lançamento.

Dados:

| $\theta$ | sen $\theta$ | cos $\theta$ | tg $\theta$ |
|---|---|---|---|
| 30º | 1/2 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ |
| 45º | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1 |
| 60º | $\sqrt{3}/2$ | 1/2 | $\sqrt{3}$ |

**13.** Dois blocos, A e B, com A colocado sobre B, estão em movimento sob ação de uma força horizontal de 4,5 N aplicada sobre A, como ilustrado na figura.

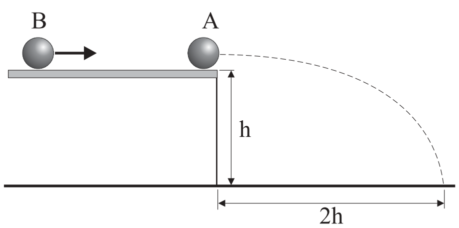



Considere que não há atrito entre o bloco B e o solo e que as massas são respectivamente $m_A$ = 1,8 kg e $m_B$ = 1,2 kg. Tomando g = 10 m/s$^2$, calcule

**a)** a aceleração dos blocos, se eles se locomovem juntos.

**b)** o valor mínimo do coeficiente de atrito estático para que o bloco A não deslize sobre B.

**14.** Uma esfera maciça A encontra-se em repouso na borda de uma mesa horizontal, a uma altura h de 0,45 m do solo. Uma esfera B, também maciça, desliza com uma velocidade de 4,0 m/s sobre a mesa e colide frontalmente com a esfera A, lançando-a ao solo, conforme ilustra a figura.

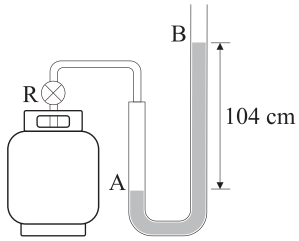



Sendo uma colisão inelástica, a esfera B retorna na mesma direção de incidência com velocidade de 2,0 m/s em módulo e a esfera A toca o solo a uma distância 2h da borda da mesa. Considerando g = 10 m/s$^2$, calcule

**a)** a velocidade com que A foi lançada ao solo.

**b)** a razão $m_A$ / $m_B$.

**15.** Uma pessoa, com o objetivo de medir a pressão interna de um botijão de gás contendo butano, conecta à válvula do botijão um manômetro em forma de U, contendo mercúrio. Ao abrir o registro R, a pressão do gás provoca um desnível de mercúrio no tubo, como ilustrado na figura.




Considere a pressão atmosférica dada por $10^5$ Pa, o desnível h = 104 cm de Hg e a secção do tubo 2 cm$^2$. Adotando a massa específica do mercúrio igual a 13,6 g/cm$^3$ e g = 10 m/s$^2$, calcule

**a)** a pressão do gás, em pascal.

**b)** a força que o gás aplica na superfície do mercúrio em A.

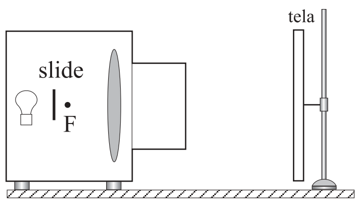
(**Advertência:** este experimento é perigoso. Não tente realizá-lo.)

**16.** Um gás ideal, inicialmente à temperatura de 320 K e ocupando um volume de 22,4 $\ell$, sofre expansão em uma transformação a pressão constante. Considerando que a massa do gás permaneceu inalterada e a temperatura final foi de 480 K, calcule

**a)** a variação do volume do gás.

**b)** o coeficiente de dilatação volumétrica do gás no início da transformação.

**17.** Um projetor rudimentar, confeccionado com uma lente convergente, tem o objetivo de formar uma imagem real e aumentada de um slide. Quando esse slide é colocado bem próximo do foco da lente e fortemente iluminado, produz-se uma imagem real, que pode ser projetada em uma tela, como ilustrado na figura.

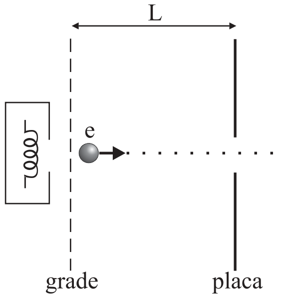



A distancia focal é de 5 cm e o slide é colocado a 6 cm da lente. A imagem projetada é real e direita. Calcule

**a)** a posição, em relação à lente, onde se deve colocar a tela, para se ter uma boa imagem.

**b)** a ampliação lateral (aumento linear transversal).

**18.** Os elétrons de um feixe de um tubo de TV são emitidos por um filamento de tungstênio dentro de um compartimento com baixíssima pressão. Esses elétrons, com carga $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, são acelerados por um campo elétrico existente entre uma grade plana e uma placa, separadas por uma distância L = 12,0 cm e polarizadas com uma diferença de potencial V = 15 kV. Passam então por um orifício da placa e atingem a tela do tubo. A figura ilustra este dispositivo.

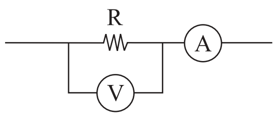



Considerando que a velocidade inicial dos elétrons é nula, calcule

**a)** o campo elétrico entre a grade e a placa, considerando que ele seja uniforme.

**b)** a energia cinética de cada elétron, em joules, quando passa pelo orifício.

**19.** Um estudante utiliza-se das medidas de um voltímetro V e de um amperímetro A para calcular a resistência elétrica de um resistor e a potência dissipada nele. As medidas de corrente e voltagem foram realizadas utilizando o circuito da figura.




O amperímetro indicou 3 mA e o voltímetro 10 V. Cuidadoso, ele lembrou-se de que o voltímetro não é ideal e que é preciso considerar o valor da resistência interna do medidor para se calcular o valor da resistência R. Se a especificação para a resistência interna do aparelho é 10 kΩ, calcule

**a)** o valor da resistência R obtida pelo estudante.

**b)** a potência dissipada no resistor.

## QUÍMICA

**20.** Alguns compostos apresentam forte tendência para formar hidratos. Um exemplo é o $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$ (massa molar = = 322 $g \cdot mol^{-1}$). Os hidratos, quando aquecidos a temperaturas adequadas, decompõem-se produzindo o composto anidro.

**a)** Escreva o nome do composto apresentado como exemplo e a fórmula química do sal anidro correspondente.

**b)** Partindo de 32,2 g do sal hidratado, qual o volume ocupado pelo gás desprendido a 400 K?
(Considere o comportamento de um gás ideal, sob pressão de uma atmosfera, a constante universal dos gases $R = 0{,}082\ L \cdot atm \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$ e que há desprendimento de todas as moléculas de água.)

**21.** O combustível vendido como “gasolina” no Brasil é, na verdade, uma mistura de gasolina (hidrocarbonetos) com uma quantidade de álcool. Duas fraudes comuns neste tipo de combustível são: a adição de excesso de álcool etílico e a adição de solventes orgânicos (hidrocarbonetos), os quais podem causar danos ao veículo e prejuízos ao meio ambiente.

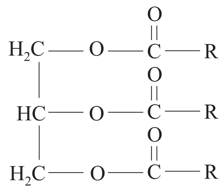
**a)** A uma proveta contendo 800 mL de gasolina foi adicionada água para completar 1 L. Posteriormente, adicionou-se iodo ($I_2$ – coloração roxa) e observou-se que a fase colorida ocupava 700 mL e a incolor, 300 mL. Forneça o nome do composto adicionado à gasolina que é detectado por este método e calcule sua porcentagem (volume/volume) no combustível analisado.

**b)** Explique por que o outro tipo de composto químico que é usado na adulteração da gasolina não é detectado por este método.

**22.** A queima da matéria orgânica, como nas queimadas que antecedem a colheita da cana-de-açúcar, é normalmente entendida, de maneira simplificada, como a combustão de açúcares, produzindo $CO_2$ e $H_2O$. Entretanto, sabe-se que se formam outros compostos, uma vez que a cana-de-açúcar não é constituída apenas de C, H e O. Por exemplo, o potássio (K, grupo 1 da classificação periódica) forma um composto com o oxigênio (grupo 16 da classificação periódica), que permanece como resíduo sólido nas cinzas.

**a)** Forneça a equação para a reação do composto de potássio presente no resíduo sólido (cinzas) com a água e faça uma estimativa para o pH da solução resultante.

**b)** Forneça a equação química apropriada que justifica o uso de cinzas, misturadas à gordura animal, para a obtenção de sabão. Como gordura animal, considere a triestearina ($C_{57}H_{110}O_6$), cuja representação simplificada para a fórmula estrutural é



**23.** O carbeto de cálcio (massa molar = 64 g·mol$^{-1}$) – também conhecido como carbureto – pode ser obtido aquecendo-se uma mistura de cal (CaO, massas molares Ca = 40 g·mol$^{-1}$ e O = 16 g·mol$^{-1}$) e carvão (C, massa molar = 12 g·mol$^{-1}$) a uma temperatura de aproximadamente 3 000°C, gerando um subproduto gasoso com massa molar igual a 28 g·mol$^{-1}$. O carbeto de cálcio pode reagir com água, produzindo acetileno (massa molar = 26 g·mol$^{-1}$) e hidróxido de cálcio, sendo de uso comum nas *carbureteiras*, nas quais o gás que sai do recipiente é queimado para fins de iluminação, especialmente em cavernas.

**a)** Escreva a equação química que representa a reação de obtenção do carbeto de cálcio.

**b)** Que massa de carbeto de cálcio é necessária para a obtenção de 13 g de acetileno?

**24.** Após o Neolítico, a história da humanidade caracterizou-se pelo uso de determinados metais e suas ligas. Assim, à idade do cobre (e do bronze) sucedeu-se a idade do ferro (e do aço), sendo que mais recentemente iniciou-se o uso intensivo do alumínio. Esta seqüência histórica se deve aos diferentes processos de obtenção dos metais correspondentes, que envolvem condições de redução sucessivamente mais drásticas.

**a)** Usando os símbolos químicos, escreva a seqüência destes metais, partindo do menos nobre para o mais nobre, justificando-a com base nas informações acima.

**b)** Para a produção do alumínio (grupo 13 da classificação periódica), utiliza-se o processo de redução eletrolítica ($Al^{3+} + 3\ e^- \rightarrow Al$). Qual a massa de alumínio produzida após 300 segundos usando-se uma corrente de 9,65 C·s$^{-1}$? (Dados: massa molar do Al = 27 g·mol$^{-1}$ e a constante de Faraday, F = 96500 C·mol$^{-1}$)

**25.** O gliceraldeído, que é o menor dos açúcares considerados aldoses, apresenta isomeria óptica. O seu nome químico é 2,3-dihidroxi-propanal.

**a)** Usando sua fórmula molecular, escreva a equação química que representa a reação de combustão do gliceraldeído.

**b)** Desenhe a sua fórmula estrutural e assinale com uma seta o carbono que justifica a existência da isomeria óptica.