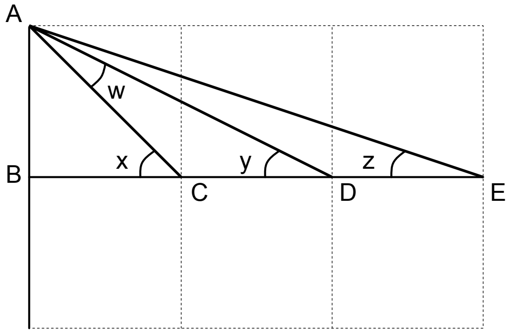
Geometria Gráfica

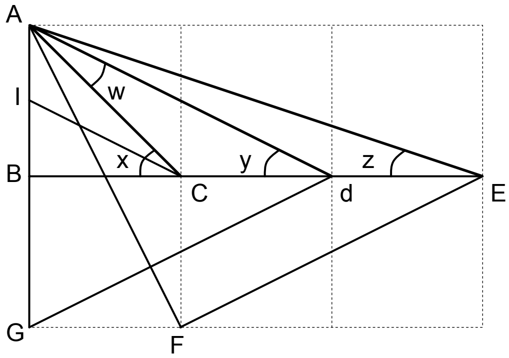
01. A figura abaixo é formada por um retângulo dividido em 6 quadrados justapostos. (x) é a medida do ângulo em (C) do triângulo (ABC), (y) é a medida do ângulo em (D) do triângulo (ABD), e (z) é a medida do ângulo em (E) do triângulo (ABE). Em relação à figura, é correto afirmar:

0-0) x=45°
1-1) y=30° e z=15°
2-2) y=x/2 e z=x/3
3-3) x=y+z
4-4) w=z



Resposta: VFFVV

Justificativa:



A partir da figura inicial, tomamos o ponto (I) médio de (AB) e os pontos (F) e (G), conforme a figura acima, de tal modo que os triângulos (ABD), (FCE) e (GBD) sejam congruentes.

0-0) Verdadeiro. O triângulo (ABC) é isósceles e retângulo em (B). A soma dos ângulos do triângulo sendo 180°, os ângulos em (C) e em (A) são iguais e dividem 90°; ou seja, x = 45°.

1-1) Falso. Se a medida do ângulo em (D) do triângulo (ABD) fosse igual a 30°, devido à congruência dos triângulos (ABD) e (GBD), a medida do ângulo em (D) do triângulo (AGD) seria de 60°. Como esse triângulo é isósceles, teremos a medida dos ângulos em (A) e (G) desse mesmo triângulo iguais a 60°; ou seja, o triângulo (AGD) seria um triângulo eqüilátero, o que não é o caso, uma vez que AG = BD < AD.

2-2) Falso. (I) sendo o ponto médio de (AB), os triângulos (IBC) e (ABD) são semelhantes. A medida do ângulo em (C) de (IBC) é igual a (y). Se (y) fosse igual a (x/2), (CI) seria a bissetriz do ângulo em (C) de (ABC). Como (CI) é a mediana em (C) do mesmo triângulo, ela seria bissetriz somente se (ABC) fosse um triângulo isósceles com AC=BC, o que não é o caso.

3-3) Verdadeiro. (ABD) e (FCE) sendo congruentes, a medida do ângulo em (E) do triângulo (FCE) é igual a (y), e a medida do ângulo em (E) do triângulo (AEF) é igual a (y+z). Como os triângulos (AGF) e (FCE) são congruentes, temos AF=FE, e o ângulo em (F) do triângulo (AEF) é reto; ou seja, o triângulo (AEF) é isósceles e retângulo em (F) e o ângulo y+z=45°=x.

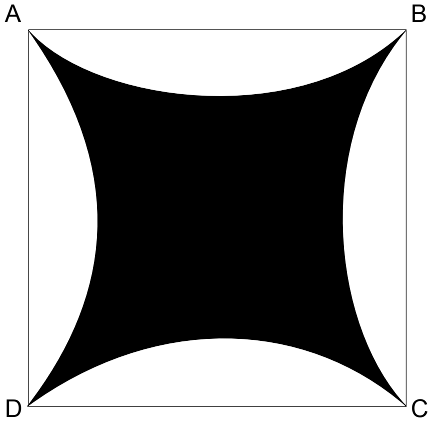
4-4) Verdadeiro. No triângulo (ACD), $A\hat{C}D$ = 90°+45°=135°. A soma dos ângulos do triângulo (ACD) fornece: y+ $A\hat{C}D$ +w=180°, ou seja, y+w=45º, como verificamos na questão anterior a que y=z+45°, temos w=z.

A questão pode também ser resolvida a partir das tangentes dos ângulos (x), (y) e (z) utilizando os valores das tangentes de 45º e 30°: tg(45°)=1 e tg(30°)= $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e da tangente da soma de ângulos $tg(a+b)=\frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a).tg(b)}$.

Observando que tg(x)=1, temos x=45°. Observando que tg(y)=1/2, temos y≠30°. Observando que tg(z)=1/3, temos tg(y+z)= $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}}=1$ dando y+z=45° e de y≠30°, podemos afirmar que z≠15° e z≠x/3. De tg(2y)=2tg(y)/(1-tg(y)²)=4/3 podemos deduzir que y≠x/2.

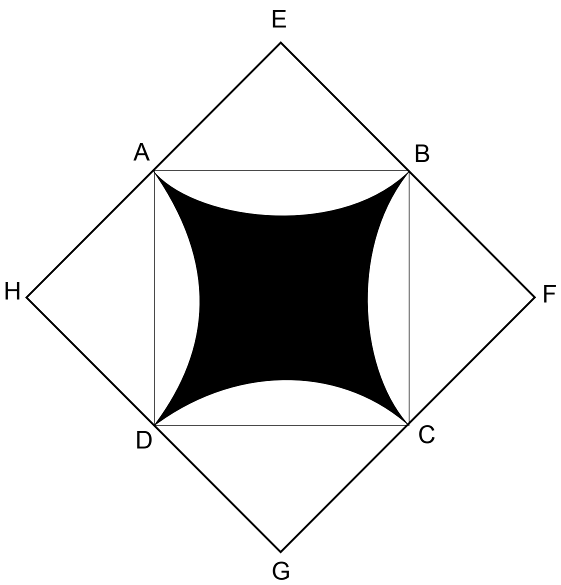
02. Um salão de festas quadrangular de área A=225m², representado pelo quadrado (ABCD), deve ter seu piso pintado nas cores branco e preto, de acordo com a figura abaixo. $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, e $\overset{\frown}{AD}$ são arcos de circunferências respectivamente tangentes às diagonais do quadrado (ABCD) nos pontos (A) e (B), (B) e (C), (C) e (D), (D) e (A). A parte central será pintada de preto e as calotas serão pintadas de branco. Sabendo-se que o rendimento da tinta é de 1 galão (2,5 l) para cada 35 m² de área, analise as proposições a seguir:

0-0) A mesma quantidade de tinta preta e de tinta branca.
1-1) 3 galões de tinta preta e 4 galões de tinta branca.
2-2) A área preta é maior que a área branca.
3-3) A tinta preta será o dobro da tinta branca.
4-4) A área preta é menor que 100m².



Resposta: FVFFV

Justificativa:

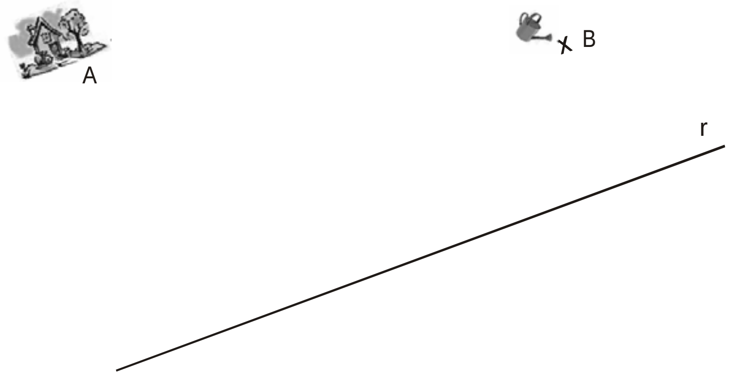


Os centros das circunferências suporte dos arcos $(\widehat{AB})$, $(\widehat{BC})$, $(\widehat{CD})$ e $(\widehat{DA})$ são vértices de um quadrado cuja área é o dobro da área do quadrado (ABCD). A área preta é equivalente à área do quadrado (EFGH) menos a área dos segmentos circulares brancos em (EAB), (FBC), (GCD) e (HDA). (EA) é a metade do lado do quadrado (EFGH), ou seja, de medida $\frac{\sqrt{2A}}{2}$. Assim, a parte central da sala pintada de preto tem como área: $\frac{2A - \pi A}{2}$ ≈97m² e os setores circulares brancos têm como área ≈128m². Serão assim necessários 97/35 ≈ 3 galões de tinta preta e 128/35 ≈ 4 galões de tinta branca.

Do exposto, podemos afirmar que:

0-0) Falso. Precisamos de mais tinta branca que de tinta preta.
1-1) Verdadeiro. Os cálculos mostram que são efetivamente necessários 3 galões de tinta preta e 4 galões de tinta branca.
2-2) Falso. Verificamos que a área preta é menor que a área branca.
3-3) Falso. Precisamos de mais tinta branca que preta e não o contrário, menos ainda do dobro de tinta preta.
4-4) Verdadeiro. a área preta sendo de aproximativamente 97m².

03. Um jardineiro tem a sua casa localizada no ponto (A) abaixo. Diariamente, ele deve regar um jardim no ponto (B). Para reduzir sua caminhada, deve escolher um ponto (M) para coletar água do rio à margem da estrada (r), garantindo que $(\overline{MA} + \overline{MB})$ seja a distância mínima a ser percorrida. Os pontos (A), (B) e a reta (r) pertencem a um mesmo plano. O ponto (P) é o ponto da margem do rio mais perto de (A) ($\overline{AP}$ =20m), e (Q) é o ponto mais perto de (B) ($\overline{BQ}$=10m). A distância entre os pontos (P) e (Q) é de 40m. A respeito de (M) é correto afirmar o seguinte:



0-0) (M) é ponto médio de ($\overline{PQ}$).

1-1) $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}$.

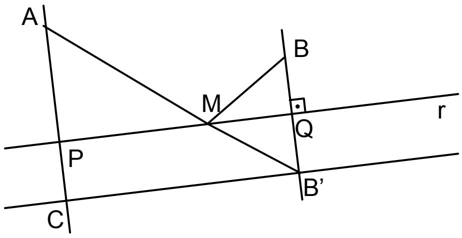
2-2) (M) está mais próximo de (A) que de (B).

3-3) $\overline{MA} + \overline{MB} = 70m$.

4-4) $\overline{MA} + \overline{MB} = 50m$

Resposta: FVFFV

Justificativa:



Considerando a figura acima onde um ponto (M), ponto para coletar a água, foi escolhido sobre a reta (r), e onde foi construído o ponto (B') de tal modo que os triângulos (MQB) e (MQB') sejam congruentes ou que a reta (r) seja mediatriz do segmento ($\overline{BB'}$). O comprimento do caminho de (A) a (B) passando por (M) tem o mesmo comprimento que o caminho de (A) a (B') passando por (M), onde: $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AM} + \overline{MB'}$. Minimizar o caminho de (A) a (B) passando por (M) é equivalente a minimizar o caminho de (A) a (B') passando por (M). O caminho mínimo de (A) para (B') passando por (M) é um segmento de reta. O ponto (M) estará localizado na interseção da reta (AB') com a reta (r). Do exposto, podemos afirmar que:

0-0) Falso. O ponto (M) seria ponto médio de ($\overline{PQ}$) somente no caso de (APB'B) ser um paralelogramo; ou seja, $\overline{AP} = \overline{QB'} = \overline{BQ}$, o que não acontece, uma vez que $\overline{AP} = 20m$ e $\overline{BQ} = 10m$. Essa mesma resposta pode ser verificada encontrando-se um ponto ao lado direito do ponto (M) que fornece um caminho $\overline{AM} + \overline{MB}$ menor que $\overline{AI} + \overline{IB}$ onde (I) é ponto médio de ($\overline{PQ}$).

1-1) Verdadeiro. Temos: Os triângulos (BMQ) e (B'MQ) são congruentes, então, o ângulo em (M) dos triângulos (BMQ) e (B'MQ) são iguais. (A), (M) e (B') sendo alinhados, os ângulos em (M) de (AMP) e (QMB') são iguais. (AP) e (BQ) são perpendiculares a (r). Disso, podemos deduzir que os triângulos (APM) e (BMQ) são semelhantes (ângulos iguais dois a dois); ou seja, as razões entre os lados correspondentes são iguais: $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}$

2-2) Falso. Graficamente, podemos verificar que (M) está mais perto de (B).

3-3) Falso. Considerando a figura acima, o caminho mínimo é obtido quando (A), (M) e (B') estão alinhados. De $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AM} + \overline{MB'}$, a medida do caminho mínimo é igual a (AB'), hipotenusa do triângulo retângulo (ACB'), $AB' = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB'}^2} = \sqrt{(20+10)^2 + 24^2}) = 50m.$

4-4) Verdadeiro. $\overline{MA} + \overline{MB} = 50m$ quando mínima.

04. A planificação de uma pirâmide que tem sua face (A) assente em um plano horizontal está representada:

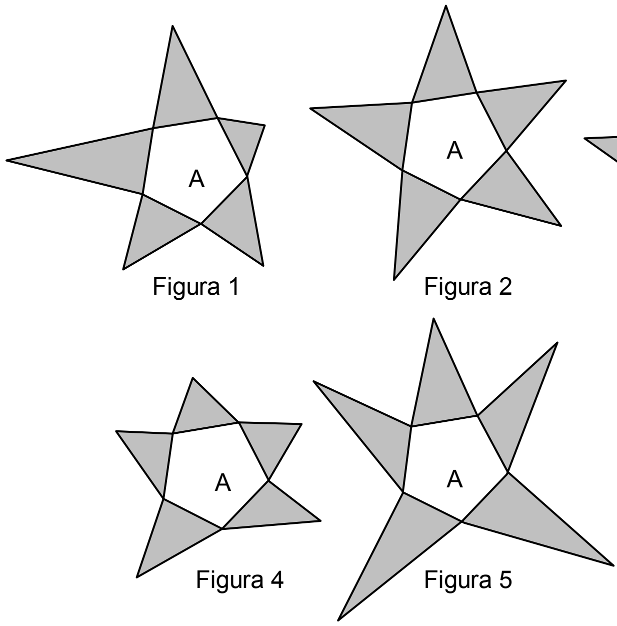


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Figura 4 Figura 5

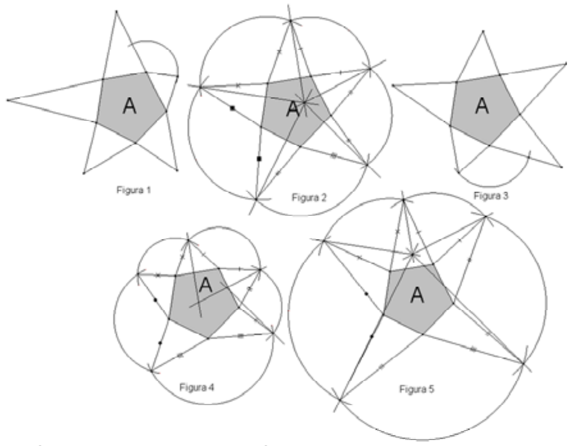
0-0) Na figura 1.
1-1) Na figura 2.
2-2) Na figura 3.
3-3) Na figura 4.
4-4) Na figura 5.

Resposta: FVFFV

Justificativa:

A planificação de uma pirâmide de base pentagonal é formada por um pentágono, a base da pirâmide, e cinco triâgulos construídos sobre os lados, as faces triangulares da pirâmide. Para que a figura apresentada seja a planificação de uma pirâmide, duas condições geométricas são necessárias e suficientes: ‘

- os lados correspondentes de dois triângulos consecutivos que vão se juntar quando se passa da planificação para a forma tridimensional, são congruentes.
- as alturas dos triâgulos das faces passando pelos vértices que vão formar o vértice da pirâmide devem se encontrar todas num mesmo ponto. A partir disso, podemos verifcar se as planificações possuem essas propriedades.



0-0) Falso. A figura 1 não é a planificação de uma pirâmide de base pentagonal porque podemos facilmente verificar que existem dois lados correspondentes de dois triângulos consecutivos que não são de mesmo tamanho (lados destacados na figura 1 acima).
1-1) Verdadeiro. A figura 2 é a planificação de uma pirâmide de base pentagonal porque podemos verificar que todos os lados correspondentes de dois triângulos consecutivos são de mesmo tamanho e que as alturas

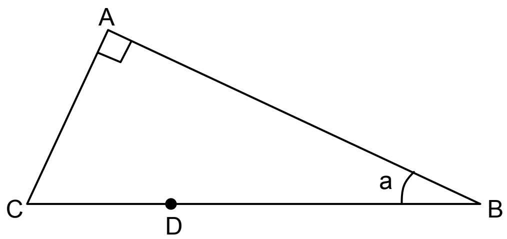
dos triângulos das faces passando pelo vértices que vão formar o vértice da pirâmide se encontram todas num mesmo ponto.

2-2) Falso. A figura 3 não é a planificação de uma pirâmide de base pentagonal porque podemos facilmente verificar que existem dois lados correspondentes de dois triângulos consecutivos que não são de mesmo tamanho (lados destacados na figura 3 acima)

3-3) Falso. A figura 4 não é a planificação de uma pirâmide de base pentagonal mesmo se podemos verificar que todos os lados correspondentes de dois triângulos consecutivos são de mesmo tamanho. Observa-se que o prolongamento das alturas dos triângulos que compõem a superfície lateral da pirâmide não se encontram no mesmo ponto.

4-4) Verdadeiro: Pela mesma razão que no caso da figura 2, a figura 5 é a planificação de uma pirâmide, mesmo se o ponto de encontro das alturas não é interior à base.

05. Na figura abaixo, o triângulo (ABC) é retângulo em (A). O ponto (D) é o "pé" da bissetriz do ângulo (A). (E) é o ponto de interseção de (AB) com a perpendicular a (CD) traçada em (D). Para qualquer triângulo (ABC) retângulo em (A), com (AC)<(AB), é possível afirmar que:



0-0) (CE) é a bissetriz do ângulo $\widehat{ACB}$.

1-1) $\widehat{ECA} = \widehat{CBA}$.

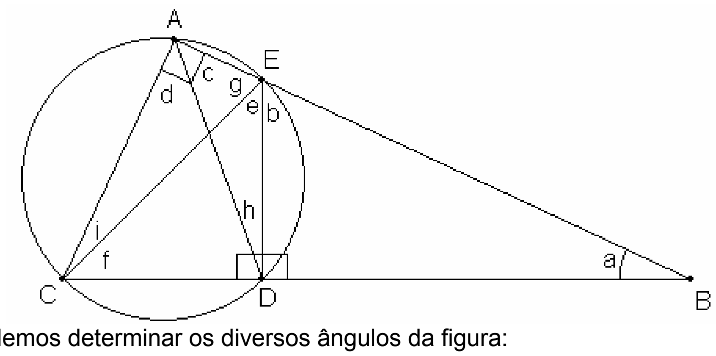
2-2) $\widehat{ECA}$ e $\widehat{CBA}$são complementares.

3-3) $\widehat{ECA} = \widehat{EDA}$.

4-4) $\widehat{ECA}$ = 45º - a.

Resposta: FFFVV

Justificativa:



Podemos determinar os diversos ângulos da figura:
Por construção,
- o triângulo (BDF) é reto em (D), então, a + b = 90° e b = 90° - a
- (AD) é bissetriz do ângulo em (A) do triângulo (ABC), como o ângulo em (A) do triângulo ABC é reto, temos d=c=45°
- como o ângulo em D do triângulo (CDE) e o ângulo em (A) do triângulo (CAE) são retos, (CDE) e (CAE) são inscritos numa mesma circunferência de diâmetro (CE). Os ângulos $\widehat{CAD}$ e $\widehat{CED}$ são inscritos nessa circunferência sobre uma mesma corda, eles têm a mesma medida, ou seja, e = d = 45°.
- O triângulo (CED) é retângulo em (D), e como e=45°, temos também f=45°.
- O triângulo (ABC) é retângulo em (A), então, i+f=90°-a, como f=45°, i=45°-a.
- Os ângulos $\widehat{ACE}$ e $\widehat{ADE}$ são inscritos numa mesma circunferência sobre uma mesma corda, disso podemos deduzir que esses dois ângulos são iguais e h=i=45°-a

A partir desses dados, podemos afirmar que:

0-0) Falso. (CE) seria bissetriz em (C) de (ACB) se i=f; ou seja, 45°=45°-a. Neste caso, a = 0, o que não ocorre.

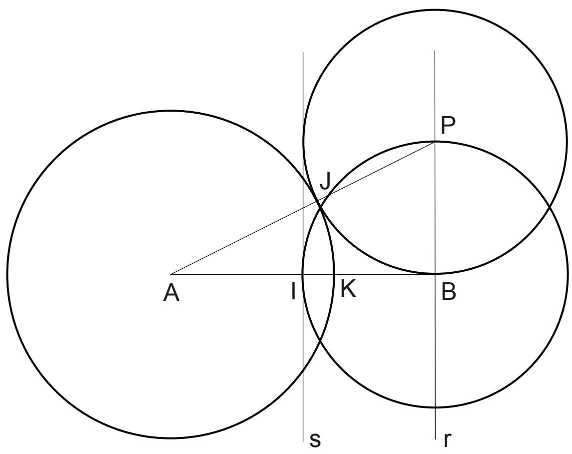
1-1) Falso. O ângulo ($\widehat{ECA}$) é igual a (i), ou seja, 45°-a; e o ângulo ($\widehat{CBA}$) é igual a (a). ($\widehat{ECA}$) e ($\widehat{CBA}$) são iguais somente quando 45° - a= a; ou seja, quando a = 22,5°, o que não é o caso em geral, e não é o caso da figura onde a = 25°.

2-2) Falso. ($\widehat{ECA}$) e ($\widehat{CBA}$) seriam complementares se $\widehat{ECA}$ + $\widehat{CBA}$ = 90°; como $\widehat{ECA}$ = i e $\widehat{CBA}$ = a, $\widehat{ECA}$ + $\widehat{CBA}$ = 45° - a + a = 45°≠90° e ($\widehat{ECA}$) e ($\widehat{CBA}$) não são complementares.

3-3) Verdadeiro. Verificamos que ($\widehat{ECA}$) e ($\widehat{EDA}$) são inscritos numa mesma circunferência sobre uma mesma corda, então, $\widehat{ECA}$ = $\widehat{EDA}$.

4-4) Verdadeiro. Segundo o cálculo acima, verificamos que $\widehat{ECA}$= i= 45°-a.

06. Com relação à figura abaixo considere $\overline{AB}$ =1u. As circunferências de centros (B) e (P) são de raio $\overline{BI}$, e as de centro (P) e (A) são tangentes no ponto (J). A reta (s) é mediatriz de ($\overline{AB}$), e (I) é ponto de interseção da mediatriz com (AB). Considerando ($\overline{AB}$) = 1u, analise as afirmações a seguir.



0-0) O comprimento de $\overline{AK}$ é $\frac{2}{3}$u .

1-1) O comprimento de $\overline{AP}$ é $\frac{\sqrt{5}}{2}$u .

2-2) O comprimento de $\overline{AP}$ é $\frac{\sqrt{3}}{2}$u .

3-3) O comprimento de $\overline{AK}$ é $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$u .

4-4) O comprimento de $\overline{AI}$ é $\frac{1}{2}$u

Resposta: FVFVV

Justificativa:

(I) é ponto médio de ($\overline{AB}$). Considerando que $\overline{AB} = 1$, temos $\overline{AI} = \overline{IB} = \frac{1}{2}$ u.

Segundo o teorema de Pitágoras, temos $\overline{AP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BP}^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ u, ou seja, $\overline{AP} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ u. De $\overline{IB} = \overline{BP} = \overline{PJ} = \frac{1}{2}$ u, podemos deduzir que

$\overline{AJ} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ u, e de $\overline{AJ} = \overline{AK}$, que $\overline{AK} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ u.

Assim:

0-0) Falso. $\overline{AK} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} u \neq \frac{2}{3} u$.

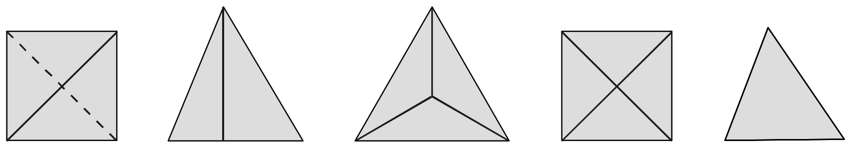
1-1) Verdadeiro. De acordo com a demonstração acima.

2-2) Falso. $\overline{AP} = \frac{\sqrt{5}}{2} u \neq \frac{\sqrt{3}}{2} u$

3-3) Verdadeiro. De acordo com a demonstração acima.

4-4) Verdadeiro. $\overline{AI} = \frac{1}{2}$ u, já que (I) é ponto médio de $\overline{AB}$.

07. Como projeção de um tetraedro regular, temos:

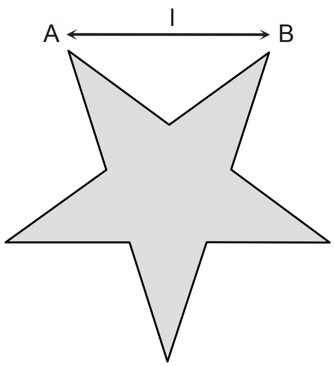


0-0) A figura 01.
1-1) A figura 02.
2-2) A figura 03.
3-3) A figura 04.
4-4) A figura 05.

Resposta: VFVFV

Justificativa:
Um tetraedro regular, de lado igual a 3cm, se assentado no plano horizontal (de projeção principal), tem como vista ortogonal a figura 03; ou seja, um triângulo eqüilátero de lado 3cm, contorno de uma das faces do poliedro. As 3 faces restantes projetam-se como triângulos isósceles, em torno de u ponto, vértice, projetado no centro do triângulo eqüilátero. Tal vista é dita em simetria ternária.
Daí, temos:
A figura 01 apresenta uma projeção equivalente à projeção do tetraedro, se colocada apenas uma aresta assente no plano horizontal (de projeção principal).
A figura 02 não pode ser a projeção de um tetraedro, uma vez que, nesta posição, teríamos como contorno um triângulo isósceles na projeção.
A figura 03 corresponde à vista em simetria ternária explicitada acima.
A figura 04 é a projeção ortogonal de um octaedro regular, tendo apenas um dos seus vértices pertencente ao plano horizontal de projeção. Poderia ser ainda considerada como a projeção de uma pirâmide quadrangular reta, com a face quadrada assente no plano horizontal de projeção.
A figura 05 também é possível de ser obtida como a projeção de um tetraedro regular, colocando-se uma aresta perpendicular ao plano horizontal de projeção.
0-0) Verdadeiro. A figura 01 é vista do tetraedro regular.
1-1) Falso. A figura 02 não é vista do tetraedro regular.
2-2) Verdadeiro. A figura 03 também é vista do tetraedro regular.
3-3) Falso. A figura 04 não é vista do tetraedro regular.
4-4) Verdadeiro. A figura 05 também é vista do tetraedro regular.

08. Na figura abaixo, (l) é a distância entre os vértices (A) e (B) de um polígono regular estrelado, inscritível em uma circunferência de raio (r). Qual o lado (l´) do pentágono regular do qual pode ser recortado um polígono estrelado semelhante?



0-0) $l' = \dfrac{2l}{\sqrt{4 - l^2}}$

1-1) $l' = \dfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}$

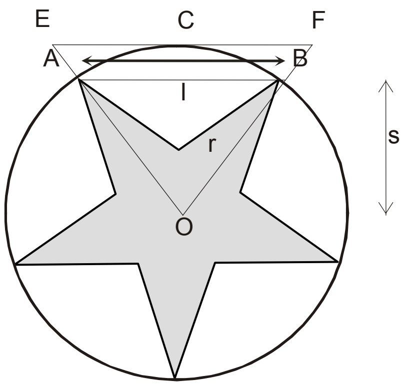
2-2) $l' = \dfrac{2lr}{\sqrt{4r^2 - l^2}}$

3-3) $l' = \dfrac{lr}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}}$

4-4) $l' = \dfrac{lr}{s}$ (Onde (s) é a apótema do polígono regular circunscrito ao polígono estrelado).

Resposta: FFVVV

Justificativa:



Sendo o polígono estrelado regular, admite uma circunferência circunscrita de raio (r). Pelo ponto (C), meio do arco (ABC), é possível traçar uma tangente (EF), limitada pelos prolongamentos dos raios (AO) e (OB), respectivamente. (AB) e (AF) são paralelas e a reta (EF), ou l, é o lado que se tem que calcular. Os triângulos (EFO) e (ABO) são semelhantes. Logo,

$l'/l = r/s$ e $l' = lr/s$

(s) é a apótema do pentágono regular circunscrito ao polígono estrelado.

$s^2 = r^2 - (l^2/4)$; ou seja, $s^2 = ½\ \sqrt{4r^2 - l^2}$.

E, $l' = \dfrac{2lr}{\sqrt{4r^2 - l^2}}$.

Supondo r igual à unidade, $l' = \dfrac{2l}{\sqrt{4 - l^2}}$.

Do exposto, concluímos que:

0-0) Falso. A proposição é verdadeira somente para r = 1.

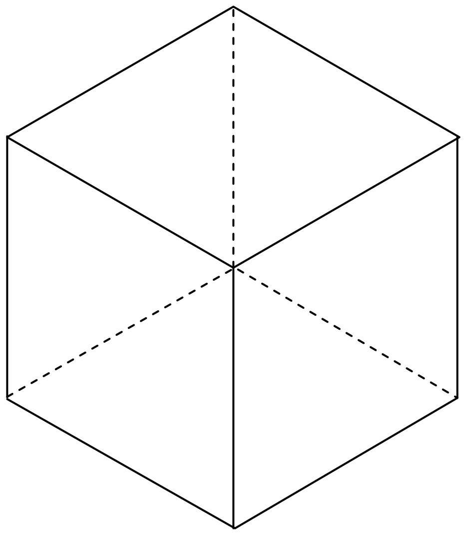
1-1) Falso. Esta é a fórmula para o cálculo da apótema do pentágono regular.

2-2) Verdadeiro. Como demonstrado acima.

3-3) Verdadeiro. Expressão anterior à exemplificação do ítem 2-2.

4-4) Verdadeiro. Como demonstrado acima, por semelhança de triângulos.

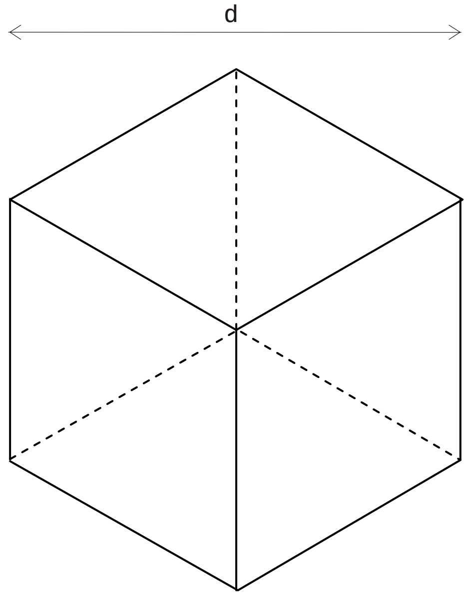
09. Uma caixa d'água de forma cúbica foi projetada com uma das suas diagonais perpendicular ao plano do solo, de acordo com a ilustração abaixo, na escala 1/50. Considere o volume real da forma e analise as afirmações a seguir:



0-0) O volume do reservatório é $\cong 9{,}54m^3$.
1-1) O lado do cubo mede $\cong 3{,}50m$.
2-2) As diagonais das faces quadradas medem $\cong$ 6cm.
3-3) A diagonal do cubo mede $\cong 7m$.
4-4) São necessários $\cong 27m^2$ de cerâmica para revestir externamente o reservatório.

Resposta: VFFFV

Justificativa:



A projeção ortogonal do hexaedro regular, cubo, em um plano perpendicular a uma das suas diagonais, deixa em verdadeira grandeza as diagonais dos quadrados, faces do cubo.
Aplicando o teorema de Pitágoras, e tomando a medida da diagonal igual a 6cm diretamente do desenho, ao converter pela escala 1/50, obtemos 3m para a medida real da diagonal.
Logo, o lado do quadrado vale $\approx 2{,}12m$ e o volume do cubo será $\approx 9{,}5m^3$.

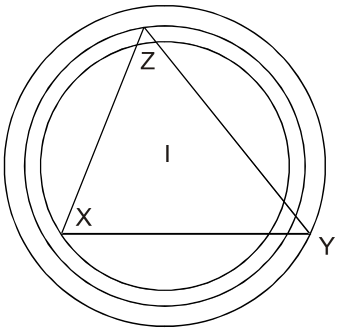
0-0) Verdadeiro. Como demonstrado acima.
1-1) Falso. O lado do cubo mede ≈2,12m, como demonstrado acima.
2-2) Falso. O candidato obterá esta resposta se tomar a medida diretamente do desenho, mas não converter na escala 1/50.
3-3) Falso. A diagonal do cubo mede ≈3,67m.
4-4) Verdadeiro. Basta calcular 6 vezes a medida da área de cada quadrado de lado=2,1213203 metros.

10. Entre as propriedades listadas abaixo, quais se aplicam às cevianas e aos pontos notáveis de um triângulo escaleno?

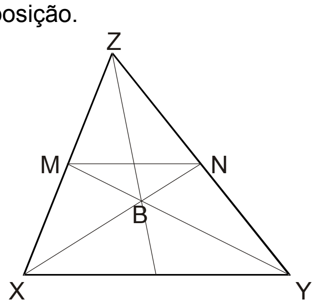
0-0) O ponto de interseção entre suas bissetrizes internas é o centro de uma circunferência circunscrita ao triângulo.
1-1) As medianas encontram-se em um ponto que dista 2/3 do seu comprimento em relação a cada vértice do triângulo.
2-2) O baricentro é o centro de uma circunferência tangente aos lados do triângulo.
3-3) As mediatrizes se encontram em um ponto eqüidistante dos vértices do triângulo.
4-4) O baricentro, o circuncentro e o ortocentro determinam uma reta.

Resposta: FFFVV

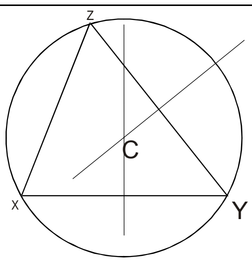
Justificativa:
0-0) Falso. O ponto de interseção entre as bissetrizes internas é o **Incentro**. O incentro é o centro de uma circunferência tangente aos lados do triângulo, uma vez que a distância de qualquer ponto da bissetriz de um ângulo aos lados é igual.



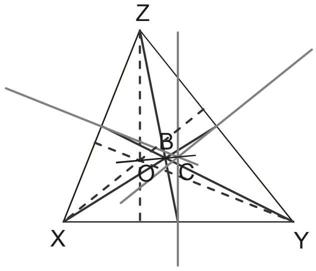
1-1) Falso. O ponto de interseção das medianas de um triângulo qualquer é o **Baricentro**, ou centro de gravidade. Sendo (M) e (N) os pontos médios de (XZ) e (YZ), respectivamente, (MN) é a base média do triângulo em relação a (XY) e vale XY/2. Por semelhança de triângulos é trivial comprovar a proposição.



2-2) Falso. De 0-0 e 1-1 conclui-se que esta proposição não é verdadeira.
3-3) Verdadeiro. Em qualquer triângulo, as mediatrizes se encontram em um ponto eqüidistante dos seus vértices, denominado Circuncentro.



4-4) Verdadeiro. A proposição é verdadeira para qualquer triângulo. Além disso, BO = 2BC.



11. Considere uma semi-esfera, um cone e um cilindro de revolução retos. Sobre estes sólidos, podemos afirmar que:

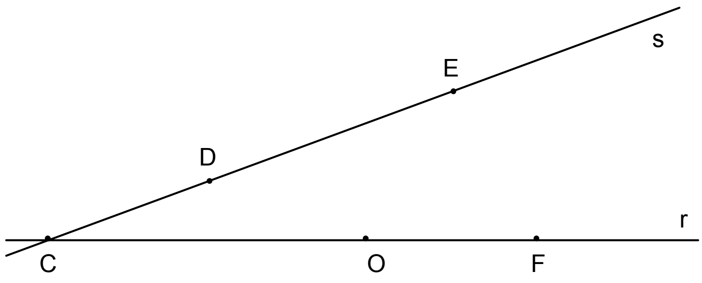
0-0) Para que o cilindro e o cone tenham o mesmo volume, é necessário que eles tenham o mesmo raio na base e que o cone seja 3 vezes mais alto.
1-1) Se o cilindro e o cone têm raio e altura iguais ao raio da semi-esfera, o volume do cilindro é igual aos volumes da semi-esfera e do cone somados.
2-2) Se o cilindro tem o dobro do volume da semi-esfera, dobrando o raio da semi-esfera, obtém-se uma semi-esfera de mesmo volume que o cilindro.
3-3) Se o cilindro tem o dobro do volume do cone, dobrando a altura do cone, obtém-se um cone de mesmo volume que o cilindro.
4-4) Se o cone e o cilindro têm a mesma altura, o cone deve ter um raio $\sqrt{3}$ vezes maior que o do cilindro para que tenham o mesmo volume.

Resposta: FVFVV

Justificativa:
Formulário:
Semi-esfera de raio (r): Vesfera=$2\pi r^3/3$
Cone de raio (r) na base e altura h: Vco=$\pi hr^2/3$
Cilindro de raio (r) e altura h: Vci=πhr^2
Então, temos:
0-0) Falso. Aplicando as fórmulas, podemos verificar que a condição proposta é suficiente, mas não é necessária, uma vez que o raio e a altura dos dois sólidos são independentes; além disso, para quaisquer valores do raio e da altura do cilindro temos uma infinidade de valores possíveis para raio e altura de um cone de mesmo volume.
1-1) Verdadeiro. Com as dimensões propostas, considerando (r) o raio da semi-esfera, temos:
Semi-esfera de raio (r) : Vesfera=$2\pi r^3/3$
Cone de raio (r) na base e altura (r): Vcone=$\pi r^3/3$
Cilindro de raio (r) e altura (r): Vcilindro=πhr^3
Efetivamente, temos: Vesfera + Vcone=$2\pi r^3/3+\pi r^3/3= \pi hr^3$= Vcilindro
Essa mesma afirmação pode ser verificada pelo principio de Cavalieri sem utilizar as fórmulas dos volumes dos sólidos.
2-2) Falso. Dobrando o raio da semi-esfera, multiplicamos o volume por 8 e não por 2.
3-3) Verdadeiro. Dobrando a altura do cone, dobramos efetivamente seu volume.

4-4) Verdadeiro. Com mesma altura e mesmo raio na base, um cilindro tem um volume 3 vezes maior que o cone. Multiplicando o raio do cone por $\sqrt{3}$, seu volume é multiplicado por 3 e será igual ao volume do cilindro.

12. Na figura abaixo, temos duas retas (r) e (s) com interseção em (C) e um ponto (O) da reta (r). O ponto (D) da reta (s) é eqüidistante de (C) e (O). O ponto (E) de (s) e (F) de (r) pertencem a uma mesma circunferência de centro (O) e raio (OD). Assim, podemos afirmar que:



0-0) (DOC), (DOE) e (EOF) são triângulos isósceles.

1-1) O ângulo ($\widehat{FOE}$) é o dobro do ângulo ($\widehat{OCD}$).

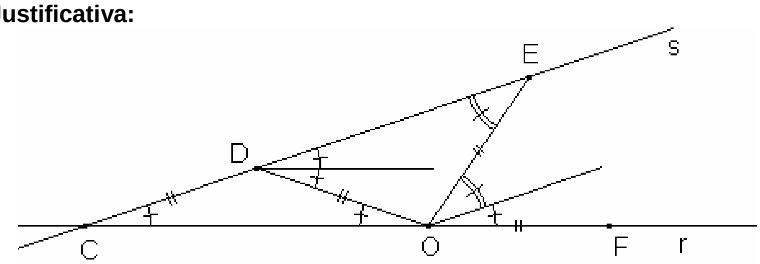
2-2) O ângulo ($\widehat{FOE}$) é o triplo do ângulo ($\widehat{OCD}$).

3-3) A soma dos ângulos ($\widehat{OCD}$), ($\widehat{ODE}$) e ($\widehat{FOE}$) é igual a 90°.

4-4) Os ângulos ($\widehat{OCD}$) e ($\widehat{FOE}$) são complementares.

Resposta: VFVFF

Justificativa:



0-0) Verdadeiro. (D) é eqüidistante de (O) e (C). Logo, (OD) = (DC). (DOC) é um triângulo isósceles. (E) e (F) estão sobre a circunferência de raio (OD) e centro O. Logo, (OD) = (OE) = (OF) e (DOE) é (EOF) são, também, triângulos isósceles.

1-1) Falso. (DOC) é isósceles; ou seja, os ângulos ($\widehat{OCD}$) e ($\widehat{COD}$) são iguais. Traçando-se uma paralela a (r) em (D), podemos verificar que o ângulo ($\widehat{ODE}$) é duas vezes o ângulo ($\widehat{OCD}$). O triângulo (ODE) sendo isósceles, os ângulos ($\widehat{ODE}$) e ($\widehat{DEO}$) são iguais. O ângulo ($\widehat{DEO}$) é o dobro do ângulo ($\widehat{OCD}$). Construindo uma paralela a (s) em (O), podemos verificar que o ângulo ($\widehat{FOE}$) é igual ao ângulo ($\widehat{ECD}$) mais o ângulo ($\widehat{DEO}$): ou seja, é o triplo do ângulo ($\widehat{OCD}$), e não o dobro.

2-2) Verdadeiro. Pela razão da resposta anterior.

3-3) Falso. Retomando a demonstração da resposta 1-1, a soma dos três ângulos ($\widehat{OCD}$), ($\widehat{ODE}$) e ($\widehat{FOE}$) é igual a 6 vezes o ângulo ($\widehat{OCD}$) e não será igual a 90° no caso geral. Isto apenas aconteceria se, em caso particular, o ângulo ($\widehat{OCD}$) fosse igual a 15°, o que não é o caso da figura acima.

4-4) Falso. Os ângulos são complementares somente se a soma de ($\widehat{OCD}$) e ($\widehat{FOE}$) fosse igual a um ângulo reto; ou seja, se 4 vezes a medida do ângulo ($\widehat{OCD}$) fosse igual a 90°, o que não acontece no caso geral e somente ocorreria se a medida do ângulo ($\widehat{OCD}$) fosse igual a 22,5°, o que não é o caso da figura acima.

13. Em relação aos poliedros regulares, podemos afirmar que:

0-0) são sempre poliedros estrelados.
1-1) possuem n(n – 3)/2 diagonais, sendo n o número de arestas do poliedro.
2-2) possuem F + V -2 arestas, sendo (F) o número de faces e (V) o número de vértices.
3-3) tem por faces: triângulos eqüiláteros, quadrados, pentágonos e hexágonos regulares.
4-4) são superfícies limitadas pelo mesmo tipo de polígono regular.

Resposta: FFVFV

Justificativa:

0-0) Falso. São cinco os poliedros regulares (eqüifaciais e eqüiangulares): o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Os poliedros estrelados regulares são apenas eqüifaciais.
1-1) Falso. Esta é a relação para o número de diagonais de um polígono.
2-2) Verdadeiro. Demonstrado pelo Teorema de Euler.
3-3) Falso. É impossível existir um ângulo sólido em um vértice em que concorram 3 hexágonos, já que somaria 360º. Os poliedros regulares têm por faces apenas triângulos eqüiláteros, quadrados e pentágonos.
4-4) Verdadeiro. Cada poliedro regular, sendo eqüifacial, contém apenas polígonos regulares de um mesmo tipo.

14. O estudo sobre a superfície plana é importante para diversas profissões, notadamente a engenharia, a arquitetura e o design, destacando-se suas aplicações em projetos de estradas, telhados, embalagens, entre outros. Nesse aspecto, torna-se imprescindível o conhecimento de elementos, propriedades e operações com planos. Em relação a esses conteúdos, avalie as afirmações seguintes:

0-0) se dois planos distintos têm 3 pontos em comum, esses pontos têm que estar alinhados.
1-1) uma reta e um ponto que a ela pertence determinam um plano.
2-2) se uma reta (r) é paralela a um plano α, então, qualquer reta deste plano é paralela a (r).
3-3) por duas retas paralelas distintas passa um único plano.
4-4) se duas retas distintas são paralelas a um mesmo plano, são paralelas entre si.

Resposta: VFFVF

Justificativa:

0-0) Verdadeiro. A interseção entre dois planos é sempre uma reta. Logo, para que 3 pontos pertençam aos 2 planos, devem ser pontos desta reta de interseção.
1-1) Falso. O ponto não pode pertencer à reta para determinar um plano.
2-2) Falso. A reta (r) pode ser reversa a uma infinidade de retas do plano.
3-3) Verdadeiro. Duas retas concorrentes ou paralelas sempre determinam um único plano.
4-4) Falso. As retas podem ser concorrentes e determinam um plano paralelo ao primeiro.

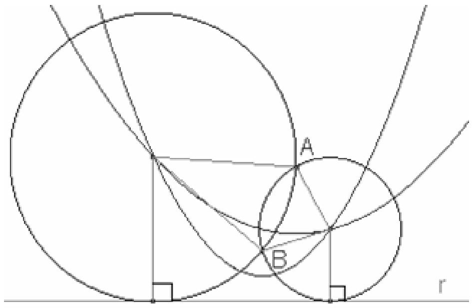
15. Considerando uma figura plana formada por uma reta (r) e dois pontos (A) e (B) que não pertencem à reta, podemos afirmar que:

0-0) Se os pontos (A) e (B) pertencem ao mesmo semiplano determinado pela reta (r), os pontos de interseção da parábola de foco (A) e diretriz (r) e da parábola de foco (B) e mesma diretriz, são eqüidistantes de (A), (B) e (r).
1-1) Qualquer que seja a posição dos pontos (A) e (B) em relação à reta (r), temos um ou nenhum ponto eqüidistante de (A), (B) e (r).

2-2) Quando (AB) é paralela a (r), o ponto eqüidistante de (A), (B) e (r) é centro de uma circunferência que passa por (A), (B) e pelo ponto de interseção da mediatriz de (AB) com a reta (r).
3-3) O centro de uma circunferência que passa por (A) e (B), e é tangente à reta (r), é eqüidistante de (A), (B) e (r).
4-4) Se (A) e (B) estão em semiplanos diferentes em relação à (r), o ponto médio entre (A) e (B) é eqüidistante de (A), (B) e (r).

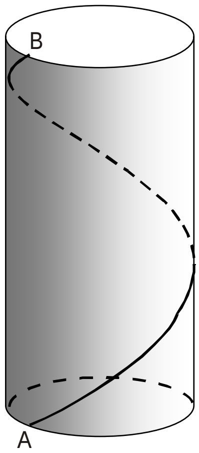
Resposta: VFVVF

Justificativa:
Vamos considerar a figura abaixo onde os pontos eqüidistantes de (A), (B) e (r) estão construídos.
Na resolução do problema, o candidato não necessita traçados precisos para elaborar seu raciocínio.



0-0) Verdadeiro. Os pontos eqüidistantes do ponto (A) e da reta (r) é uma parábola de foco (A) e diretriz (r). Os pontos eqüidistantes do ponto (B) e da reta (r) é uma parábola de foco (B) e diretriz (r). Logo, os pontos eqüidistantes de (A), (B) e (r) estão na interseção dessas duas parábolas.
1-1) Falso. Temos nenhum, um ou dois pontos. Uma forma intuitiva simples de perceber isso é observar que pontos eqüidistantes de um ponto (A) e uma reta (r) ficam sempre no mesmo semiplano determinado pela reta (r) e o ponto (A). Quando (A) e (B) estão em semiplanos diferentes, não teremos pontos eqüidistantes satisfazendo as duas condições. Quando os dois pontos estão no mesmo semiplano, teremos, no caso geral, dois pontos de interseção das parábolas, ou duas circunferências que passam por (A) e (B) e são tangentes à reta (r). Temos somente um ponto quando a reta (AB) for paralela a (r).
2-2) Verdadeiro. Nesse caso, a mediatriz de (AB) é perpendicular a (r), e o ponto de interseção desta mediatriz com a reta (r) é ponto de tangência da circunferência que passa por (A), (B) e o ponto de interseção. Logo, o centro da circunferência é eqüidistante de (A), (B) e (r).
3-3) Verdadeiro. A distância do centro de uma circunferência a uma reta tangente a ela, é igual ao comprimento do seu raio. O centro de uma circunferência que passa por dois pontos e é tangente a uma reta, é eqüidistante dos pontos e da reta.
4-4) Falso. Justificada na alternativa 1-1.

16. Qual a menor quantidade de fita que deve ser utilizada para enfeitar o mastro de forma cilíndrica (reto) de uma bandeira de 5m de altura, como na figura abaixo, se são gastos 50cm para cada volta na superfície do cilindro. O diâmetro do mastro é 15cm. Assinale o inteiro mais próximo em metros.



Resposta: 15

Justificativa:

Planificando a superfície lateral de um cilindro reto, observa-se que a menor distância entre dois pontos da sua superfície é a hipotenusa de um triângulo retângulo. No caso, para uma volta completa, a hipotenusa vale 50cm, e o cateto adjacente será $2\pi r$; ou seja: $50^2 = (2\pi(7,5)^2 + h^2)$. (h) corresponde à altura do segmento do cilindro enfeitado pela fita. Logo, $h \approx 16,78$cm.

Como o mastro tem 5m de altura, serão necessários 14,89 ($\approx$15m) de fita, uma vez que o mastro corresponde a 29,79 segmentos cilíndricos idênticos (500cm/16,78cm).