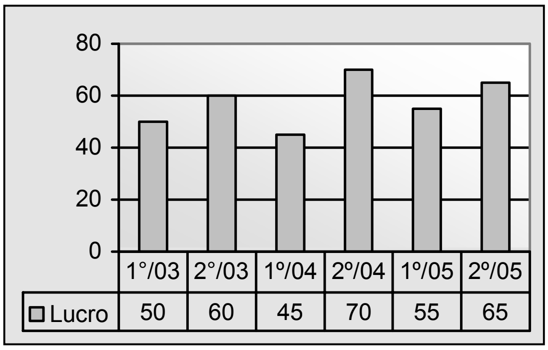
MATEMÁTICA

01. O gráfico a seguir ilustra o lucro semestral de uma empresa, em milhares de reais, de 2003 a 2005.



0-0) O lucro médio anual da empresa neste período foi de R$ 57.500,00.
1-1) No primeiro semestre de 2005, o lucro foi 5% superior ao obtido no primeiro semestre de 2003.
2-2) O lucro percentual do segundo semestre, em relação ao primeiro semestre do mesmo ano, foi maior em 2004.
3-3) O lucro anual cresceu linearmente de 2003 a 2005.
4-4) A média dos lucros dos primeiros semestres foi 15% inferior à média nos segundos semestres.

Resposta: FFVVF

Justificativa:
Solução: O lucro médio anual da empresa foi de (110 + 115 + 120)/ 3 = 115 mil reais; logo, 0-0) é falsa. No primeiro semestre de 2005, o lucro foi de 55 = 50.1,10 mil reais; logo, 10% maior que o do primeiro semestre de 2003; segue que 1-1) é falsa. Em 2003, o lucro do segundo semestre cresceu 10/50 = 20% em relação ao primeiro; em 2004, cresceu 25/45 ≅ 55,6% e, em 2005, o crescimento foi de 10/55 ≅ 18,2 %; portanto, o crescimento foi maior em 2004 e 2-2) é verdadeira. Em 2003, 2004 e 2005 os lucros anuais foram respectivamente de 110, 115 e 120 mil reais; logo, houve um crescimento anual constante de 5 mil reais, e 3-3) é verdadeira. A média dos lucros dos primeiros semestres foi de (50 + 45 + 55)/3 = 50 mil reais, e, nos segundos semestres, foi de (60 + 70 + 65)/3 = 65 mil reais, e a média dos primeiros semestres foi 15/65 ≅ 23,1 % inferior à média dos segundos semestres.

02. Seja f a função, tendo o conjunto dos números reais como domínio e dada, para x real, por

$$f(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 1).$$

Analise a veracidade das afirmações seguintes relativas a f.

0-0) As raízes de $f(x) = 0$ são $x = -1$ e $x = 1$.
1-1) $f(x) < 0$ para todo x real com $x < 1$.
2-2) O gráfico de f intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, -1).
3-3) $f(10^6) > 10^{18}$
4-4) $f(x) = (x + 1)(x^2 - 1)$, para todo x real.

Resposta: VFVVV

Justificativa:
$f(x) = (x - 1)(x + 1)^2$ e as raízes de $f(x) = 0$ são $x = 1$ e $x = -1$, logo 0-0 é verdadeira. Temos $(x - 1)(x + 1)^2 < 0$ precisamente se $x - 1 < 0$ e $x + 1 \neq 0$, ou seja, para $x < 1$ e $x \neq -1$, logo 1-1 é falsa. O gráfico de f intercepta o eixo das ordenadas no ponto com abscissa 0 e ordenada $f(0) = -1$, daí 2-2 ser verdadeira. $f(10^6) = (10^6 - 1)(10^6 + 1)^2 = 10^{18} + 2.10^{12} - 10^6 - 1 > 10^{18}$, logo 3-3 é verdadeira. Se $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 1) = (x +1)(x^2 - 1)$ 4-4 é verdadeira.

03. Um investidor inglês tem 21.000 libras esterlinas para investir por um período de um ano. Para ser investido no Brasil, o valor é convertido para reais e, após o período de investimento, é novamente convertido para libras, antes de retornar ao investidor. Os juros pagos no Brasil são de 20% ao ano, e os juros pagos na Inglaterra são de 5% ao ano. Supondo que o valor da libra hoje é de R$ 4,00 reais e que o seu valor em um ano será de R$ 4,20, analise as afirmações a seguir.

0-0) Se o investidor escolher o Brasil para aplicar, ele receberá 4000 libras de juros.
1-1) Se aplicar na Inglaterra, o investidor receberá 1050 libras de juros.
2-2) Se o investidor escolher o Brasil para aplicar, o montante da aplicação será de 100.800 reais.
3-3) Se o investidor escolher o Brasil para aplicar, ele receberá, de juros, o equivalente a 20% do valor aplicado em libras esterlinas.
4-4) Se o investidor aplicar na Inglaterra, ele receberá, de juros, um quarto do valor que receberia se aplicasse no Brasil.

Resposta: VVVFF

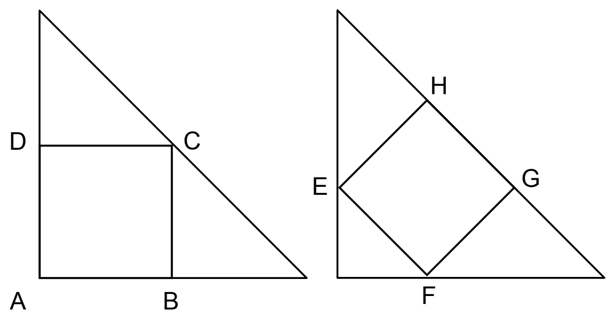
Justificativa:
As 21000 libras equivalem a 4.21000 = 84000 reais, hoje, e, se investidas no Brasil, renderão, em um ano, 84000.0,2 = 16800 reais ou 16800/4,2 = 4000 libras; logo 0-0) é verdadeira. Na Inglaterra, em um ano, os juros serão de 21000.0,05 = 1050 libras; daí 1-1) ser verdadeira. Se a quantia for aplicada no Brasil, o montante, ao final de um ano, será de 84000 + 16800 = 100800 reais; portanto, 2-2) também é verdadeira. Aplicado no Brasil, o juro será de 4000 libras, que corresponde a 4000/21000 $\cong$ 19,05% do valor aplicado em libras. Se aplicado na Inglaterra, os juros serão de 1050 libras, e, no Brasil, serão de 4000 libras, que equivalem a aproximadamente 3,81 vezes os juros obtidos no Brasil. Logo, 3-3) e 4-4) são falsas.

04. Seja f uma função real tendo o intervalo [0,99] como domínio e cujo gráfico é um segmento de reta. Se f(0) = 70 e f(99) = -40, para qual valor de x temos f(x) = 0?

Resposta: 63

Justificativa:
Como o gráfico de f é um segmento de reta, temos que f é a restrição de uma função afim ao intervalo [0,99]; assim, existem constantes reais a e b, tais que f(x) = ax + b e f(0) = b, logo b = 70; f(99) = 99a+ 70 = -40 e a = -10/9; segue que f(x) = -10x/9 + 70 e f(x) = 0 para x = 9.70/10 = 63.

05. Nas ilustrações abaixo temos dois quadrados, ABCD e EFGH, inscritos em triângulos retângulos isósceles e congruentes.



Se o quadrado EFGH tem lado medindo $6\sqrt{2}$, assinale a área do quadrado ABCD.

Resposta: 81

Justificativa:
Como os ângulos agudos de um triângulo retângulo isósceles medem 45^o, e o quadrado EFGH tem lado $6\sqrt{2}$, temos que a hipotenusa do triângulo isósceles

mede $3.6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$, e seus catetos medem 18. Temos, então, que o lado do quadrado ABCD é metade do cateto do triângulo isósceles; logo, mede 9, e a área de ABCD é 81.

06. Júnior compra R$ 5,00 de bananas toda semana. Em certa semana, ele observou que o número de bananas excedia em cinco o número de bananas da semana anterior, e foi informado de que o preço da dúzia de bananas tinha sido diminuído de um real. Quantas bananas ele comprou na semana anterior?

Resposta: 15

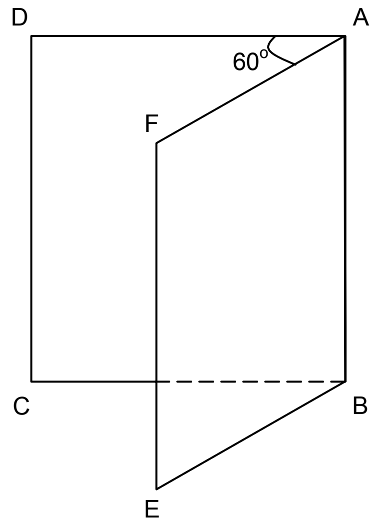
Justificativa:
Se x é o número de bananas compradas na semana anterior, então, o preço da dúzia na semana anterior era de 12.5/x, e o preço atual é de 12.5/(x + 5). Como o preço da dúzia diminuiu de um real, temos 12.5/x – 12.5/(x + 5) = 1, que se simplifica como 60.5 = x(x + 5) ou $x^2 + 5x - 300 = 0$, daí $x = (-5 \pm 35)/2 = 15$ ou -20, e o valor aceitável é x = 15.

07. As máquinas X, Y e Z produzem, respectivamente, 20%, 30% e 50% do total de peças de uma fábrica. O percentual de peças defeituosas produzidas por X, Y e Z é de 5%, 4% e 3%, respectivamente. Se uma peça é escolhida ao acaso e verifica-se que é defeituosa, qual a probabilidade percentual p% de que essa peça tenha sido fabricada pela máquina X? Indique o inteiro mais próximo de p.

Resposta: 27

Justificativa:
Do total de peças fabricadas, o percentual de peças defeituosas produzidas por X é de 20.0,05 = 1%, por Y é de 30.0,04 = 1,2% e por Z é de 50.0,03 = 1,5% . A probabilidade percentual de a peça ter sido produzida pela máquina X é de 100/(1 + 1,2 + 1,5) = 100/3,7 $\cong$ 27,03%.

08. Na ilustração abaixo, ABCD e ABEF são retângulos, e o ângulo DAF mede 60^o. Se AB mede $2\sqrt{30}$, BE mede 6 e BC mede 10, qual a distância entre os vértices C e F?



Resposta: 14 .

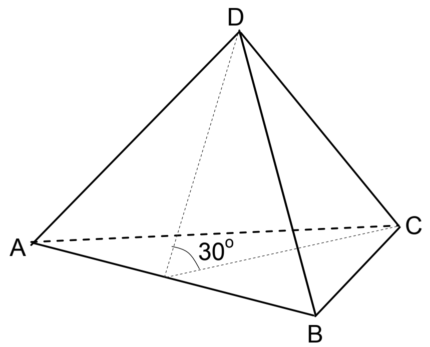
Justificativa:
Temos $CE^2 = 6^2 + 10^2 - 2.6.10.\cos 60^o = 6^2 + 10^2 - 6.10 = 76$ e $CF^2 = CE^2 + (2\sqrt{30})^2 = 76 + 120 = 196$ e CF = 14.

09. O valor da média salarial dos funcionários de uma empresa, com x anos de trabalhos prestados, é dada por $s(x) = 100(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+10})$. Para quantos meses trabalhados na empresa, a média salarial será de R$ 700,00?

Resposta: 72

Justificativa:
Queremos o valor de x para o qual $100(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+10}) = 700$ ou $\sqrt{x+10} = 7 - \sqrt{x+3}$, que, elevando ao quadrado e simplificando, se torna x + 10 = 52 + x - 14 $\sqrt{x+3}$, que equivale a $\sqrt{x+3}$ = 3; novamente quadrando, obtemos x + 3 = 9 e x = 6.

10. O tetraedro ABCD tem aresta AB medindo 12; a face ABD tem área 48, e a face ABC tem área 60. Se o ângulo entre as faces ABC e ABD mede 30°, qual o volume do tetraedro?



Resposta: 80

Justificativa:
A altura relativa ao lado AB do triângulo ABD mede 2.48/12 = 8, e a altura do tetraedro, relativa à base ABC, mede 8.sen 30° = 4. O volume do tetraedro é 60.4/3 = 80.

11. O preço de um automóvel, P(t), desvaloriza-se em função do tempo t, dado em anos, de acordo com uma função de tipo exponencial $P(t) = b.a^t$, com a e b sendo constantes reais. Se, hoje (quando t = 0), o preço do automóvel é de 20000 reais, e valerá 16000 reais daqui a 3 anos (quando t = 3), em quantos anos o preço do automóvel será de 8192 reais? (Dado: $8192/20000 = 0{,}8^4$).

Resposta: 12

Justificativa:
Temos P(0) = b = 20000 e $P(3) = 20000.a^3 = 16000$; logo $a^3 = 0{,}8$ e $a = 0{,}8^{1/3}$. Portanto, $P(t) = 20000.0{,}8^{t/3}$. Queremos o valor de t tal que P(t) = 8192 ou $20000.0{,}8^{t/3} = 8192$, que se simplifica como $0{,}8^{t/3} = 8192/20000 = 0{,}8^4$, e daí t = 3.4 =12 anos.

12. Um polinômio P(x), com coeficientes reais, é tal que P(1) = 1 e P(2) = -1. Calcule R(-11/2), se R(x) é o resto da divisão de P(x) por $x^2 - 3x + 2$.

Resposta: 14

Justificativa:
Pelo Algoritmo da Divisão, $P(x) = q(x)(x^2 – 3x + 2) + R(x)$, sendo R(x) um polinômio de grau no máximo 1. Portanto, se R(x) = Ax + B, então, A + B = 1 e 2A + B = -1, donde R(x) = -2x + 3 logo R(-11/2) = 14.

13. Se x e y são números reais positivos satisfazendo $\log_8 x + \log_4 y^2 = 6$ e $\log_4 x^2 + \log_8 y = 10$, qual o valor de $\sqrt{xy}$?

Resposta: 64

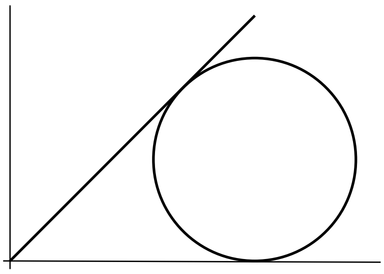
Justificativa:
Da primeira igualdade, resulta que $\log_2 x/3 + \log_2 y = 6$, e da segunda, temos que $\log_2 x + \log_2 y/3 = 10$, que equivalem, respectivamente, a $x^{1/3}y = 2^6$ e $xy^{1/3} = 2^{10}$. Multiplicando estas igualdades, obtemos $(xy)^{4/3} = 2^{16}$ e $\sqrt{xy} = 2^6 = 64$.

14. Um quarteto de cordas é formado por dois violinistas, um violista e um violoncelista, e os dois violinistas exercem funções diferentes. De quantas maneiras se pode compor um quarteto, se podemos escolher entre quatro violinistas, três violistas e dois violoncelistas?

Resposta: 72

Justificativa:
Os violinistas podem ser escolhidos de 4.3 formas diferentes, portanto o quarteto pode ser formado de 4.3.3.2 = 72 maneiras.

15. Uma circunferência de raio 10 é tangente ao eixo das abscissas e à reta com equação y = x. Se a circunferência tem centro no ponto (a, b), situado no primeiro quadrante, assinale o inteiro mais próximo de **a**.



Resposta: 24

Justificativa:
Uma vez que a o eixo das abscissas é tangente à circunferência que tem raio 10, temos b = 10. Temos $(x – a)^2 + (x – 10)^2 = 10^2$, com x sendo a abscissa do ponto em que a reta y = x intercepta a circunferência. Também temos $2x^2 = a^2$, pois a distância entre (x, x) e a origem é igual à distância entre (a,0) e a origem, ou $\sqrt{2}\,x = a$, uma vez que x e a têm o mesmo sinal. Substituindo, obtemos, $x^2(3 - 2\sqrt{2}) + x^2 - 20x = 0$, que se simplifica como $(4 - 2\sqrt{2})\,x^2 – 20x = 0$ e $x = 0$ ou $x = 20/(4 - 2\sqrt{2}) = 5(4 + 2\sqrt{2})/2$. Então, $a = 10(\sqrt{2} +1) \cong 24{,}14$.

16. Se a e b são inteiros positivos, e o número complexo $(a + bi)^3 – 11i$ também é inteiro, calcule a e b e assinale $a^2 + b^2$.

Resposta: 5

Justificativa:
A parte imaginária de $(a + bi)^3 – 11i$ é nula; logo, $3a^2b – b^3 = 11$, que se fatora como $b(3a^2 – b^2) = 11$. Como a e b são inteiros positivos, segue que b divide 11, e b = 1 ou b = 11. Se b = 1 então $3a^2 – 1 = 11$ e a = 2. Se b = 11 temos $3a^2 = 122$, que não tem solução inteira. $a^2+ b^2 = 5$.