

**QUESTÕES ABERTAS ESPECÍFICAS PARA OS
FORMANDOS DE BACHARELADO****Questão nº 1****Padrão de Resposta Esperado:**

$$e^{i(\alpha + \beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} &= (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + i^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + i \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = \\ &= [\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta] + i [\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta] \end{aligned} \quad (2)$$

Como $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha + \beta)}$, os complexos (1) e (2) são iguais. Logo, suas partes reais são iguais, e suas partes imaginárias são também iguais.

Portanto,

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)$ e **(valor: 10,0 pontos)**

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)$. **(valor: 10,0 pontos)**

Questão nº 2**Padrão de Resposta Esperado:**

a) Se a vazão é de $500 \text{ m}^3/\text{h}$, em 5 horas a piscina recebe $5 \times 500 = 2\,500$ metros cúbicos. Este é o volume da piscina, pois ela inicialmente estava vazia. **(valor: 5,0 pontos)**

b) 1ª Alternativa de solução

Seja T o tempo (em horas) procurado.

$$\text{Temos } 2\,500 = \int_0^T V(t) dt = \left[25t^2 \right]_0^T = 25T^2$$

$$T^2 = 100$$

$$T = 10 \text{ (horas)}$$

2ª Alternativa de solução

Seja T o tempo (em horas) procurado.

$$\text{A vazão média é } \frac{50T}{2} = 25T$$

$$\text{Então, } T \cdot 25T = 2\,500$$

$$T^2 = 100$$

$$T = 10 \text{ (horas)}$$

(valor: 15,0 pontos)

Questão nº 3

Padrão de Resposta Esperado:

a) Sim, pois seus autovalores são distintos.

(valor: 5,0 pontos)

b) Como A é diagonalizável, existe uma matriz P, invertível, tal que $A = P^{-1} D P$, sendo

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$A^2 = P^{-1} D P P^{-1} D P = P^{-1} D^2 P$ e facilmente se prova que $A^n = P^{-1} D^n P$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \lim_{n \rightarrow \infty} [P^{-1} D^n P] = P^{-1} 0 P = 0, \text{ pois } \lim_{n \rightarrow \infty} D^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Daí, $A^n \mathbf{v} \rightarrow 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(valor: 15,0 pontos)

Questão nº 4**Padrão de Resposta Esperado:****a) 1ª Alternativa de solução**

A é aberto em X significa que, para todo $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que a bola aberta (vizinhança) de centro x e raio ε , ou seja,

$$\{y \in X \mid d(y; x) < \varepsilon\} \text{ está contida em } A. \quad (\text{valor: 5,0 pontos})$$

2ª Alternativa de solução

A é aberto em X significa que, para todo ponto $a \in A$, existe um $\delta > 0$, tal que se $x \in X$ e $d(x, a) < \delta$, então também $x \in A$. (valor: 5,0 pontos)

3ª Alternativa de solução

A é aberto em X significa que o complemento de A (isto é, $X - A$) é fechado. (valor: 5,0 pontos)

b) 1ª Alternativa de solução

A é fechado em X significa que o complemento de A (isto é, $X - A$) é aberto. (valor: 5,0 pontos)

2ª Alternativa de solução

A é fechado em X significa que, para todo ponto $r \in X - A$, existe um $\delta > 0$ tal que se $s \in X$ e $d(r, s) < \delta$ então também $s \notin A$. (valor: 5,0 pontos)

3ª Alternativa de solução

A é fechado significa que, para toda seqüência convergente $\{x_n\}$ de elementos de A , então $\lim x_n$ também pertence a A . (valor: 5,0 pontos)

c) 1ª Alternativa de solução

f é contínua em X significa que para todo $\varepsilon > 0$ e todo $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $d(f(y); f(x)) < \varepsilon$ para todo $y \in X$ tal que $d(y; x) < \delta$. (valor: 5,0 pontos)

2ª Alternativa de solução

f é contínua em X significa que, para todo conjunto aberto $B \subset Y$, a imagem inversa $f^{-1}(B)$ é um conjunto aberto em X . (valor: 5,0 pontos)

3ª Alternativa de solução

f é contínua em X significa que, para toda seqüência convergente $\{x_n\}$ de elementos de X , a seqüência $\{f(x_n)\}$ também é convergente e $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$. (valor: 5,0 pontos)

d) 1ª Alternativa de solução

Seja S o conjunto solução da equação $f(x) = a$. Mostremos que o complemento de S , $X - S$, é aberto.

Seja $r \in X - S$; então, $f(r) = b \neq a$ (pois $r \notin S$). Pela continuidade de f , tomando $\varepsilon = d(a; b)/2$ existirá $\delta > 0$ tal que se $s \in X$ e $d(r; s) < \delta$ ter-se-á, pondo $f(s) = c$, $d(c; b) < \varepsilon = d(a; b)/2$. Mostraremos que $s \notin S$, mostrando que $c \neq a$. Com efeito, pela desigualdade triangular, $d(a; b) \leq d(a; c) + d(c; b)$. Daí, $d(a; c) \geq d(a; b) - d(c; b) > d(a; b) - d(a; b)/2 = d(a; b)/2 > 0$ e $c \neq a$. Logo, $s \notin S$, c.q.d. **(valor: 5,0 pontos)**

2ª Alternativa de solução

Seja $A = \{x \in X \mid f(x) = a\}$, ou seja, $A = f^{-1}\{a\}$. Mostremos que A é fechado, tomando uma seqüência $\{x_n\}$ de elementos de A , convergente em X , com $\lim x_n = x$, e provando que $x \in A$. Ora, como f é contínua, sabe-se que $f(x_n)$ também é convergente em Y e que $\lim f(x_n) = f(x)$. Mas, $f(x_n) = a$ para todo n ; então, $\lim f(x_n) = a$. Como $f(x)$ é igual a este limite, resulta $f(x) = a$; daí $x \in A$, c.q.d. **(valor: 5,0 pontos)**

3ª Alternativa de solução

Seja $A = \{x \in X \mid f(x) = a\}$, ou seja, $A = f^{-1}\{a\}$. Mostremos que A é fechado, isto é, que o complemento de A é aberto. Seja $B = \{y \in Y \mid y \neq a\}$; então B é aberto em Y , pois se $y \in B$, $d(y; a) = d > 0$ e, se tomamos $z \in Y$ tal que $d(z; y) < d/2$, teremos: $d(a; z) \geq d(a; y) - d(y; z) > d - d/2 = d/2 > 0$, logo $z \neq a$, donde $z \in B$ e B é aberto. Então, pela continuidade de f , $f^{-1}(B)$ é aberto em X . Nossa tese estará provada se mostrarmos que $f^{-1}(B)$ é o complementar de A em X . Com efeito, se $r \notin A$, então $f(r) \neq a$ e $r \in f^{-1}(B)$. Reciprocamente, se $r \in f^{-1}(B)$, $f(r) \neq a$ e $r \notin A$, c.q.d. **(valor: 5,0 pontos)**

4ª Alternativa de solução

Seja $A = \{x \in X \mid f(x) = a\}$. Mostremos que A é fechado. Ora, sendo $\{x_n\}$ uma seqüência convergente de elementos de A , com limite igual a x , devemos provar que $x \in A$. Ora, como $f(x_n) = a$ para todo n , então $\lim f(x_n) = a$. Basta então mostrar que $f(x) = a$. Ora, supondo que $f(x) = b \neq a$, e tomando o aberto $B = \{y \in Y \mid d(y; b) < d(a; b)/2\}$, temos, pois f é contínua, que $f^{-1}(B)$ é aberto. Mas, então, como $f(x) \in B$, temos $x \in f^{-1}(B)$. Logo, existe $d > 0$ tal que a bola aberta de centro x e raio d está contida em $f^{-1}(B)$. Mas, sendo $\lim x_n = x$, tem-se que nessa bola existiriam infinitos elementos da seqüência $\{x_n\}$, o que é absurdo porque isso implicaria a existência de infinitos elementos da seqüência $\{f(x_n)\}$ situados a uma distância de b menor que $d(a; b)/2$, o que contradiz $f(x_n) = a$. **(valor: 5,0 pontos)**

Questão nº 5

Padrão de Resposta Esperado:

- a) Sendo $q(0) = 1$ e $q(1) = 1 + 1 + 1 = 1$, $q(x)$ não tem raízes em \mathbb{Z}_2 . (Logo, sendo do 2º grau, é irredutível). **(valor: 5,0 pontos)**
- b) Pelo Teorema de Kronecker, $\alpha \in E$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ e $q(\alpha) = 0$, isto é: $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Daí, segue que $\alpha + 1 \in E$ (pois E é um corpo) e é diferente de α (pois $1 \neq 0$). **(valor: 5,0 pontos)** Com as operações indicadas a seguir, vê-se que $0, 1, \alpha, \alpha + 1$ formam uma extensão de \mathbb{Z}_2 satisfazendo as condições para E . Portanto, o número mínimo de elementos de E é 4. **(valor: 5,0 pontos)** As operações em $E = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$ são dadas nas tabelas a seguir.

+	0	1	α	$\alpha + 1$
0	0	1	α	$\alpha + 1$
1	1	0	$\alpha + 1$	α
α	α	$\alpha + 1$	0	1
$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	α	1	0

x	0	1	α	$\alpha + 1$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$\alpha + 1$
α	0	α	$\alpha + 1$	1
$\alpha + 1$	0	$\alpha + 1$	1	α

(valor: 5,0 pontos)

QUESTÕES ABERTAS ESPECÍFICAS PARA OS FORMANDOS DE LICENCIATURA

Questão nº 6

Padrão de Resposta Esperado:

- a) Se não se define o grau do polinômio identicamente nulo e se em uma divisão o grau do resto deve existir, o polinômio identicamente nulo não pode ser resto de divisão. **(valor: 10,0 pontos)**
- b) Uma possibilidade é atribuir um grau ao polinômio identicamente nulo, de modo que ele tenha grau menor que o dos outros polinômios. Usualmente, a ele se atribui grau $-\infty$. **(valor: 10,0 pontos)**
Outra possibilidade é corrigir a definição de divisão, pondo ... com $R(x)$ identicamente nulo ou grau $R(x) < \text{grau } B(x)$.
Esta alternativa não é usual, pois implica ter de escrever " ... ou identicamente nulo" em muitos teoremas. **(valor: 10,0 pontos)**

Questão nº 7

Padrão de Resposta Esperado:

- a) A opinião do Professor X reflete melhor as recomendações dos PCN, **(valor: 5,0 pontos)** pois, segundo estes parâmetros, tanto no que se refere ao ensino das séries fundamentais, como ao ensino médio, um dos objetivos do ensino da matemática é o de "estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares" As observações do professor Y contrariam este objetivo. **(valor: 5,0 pontos)**

Obs.: Tal citação é encontrada, por exemplo, em PCN, Matemática – 1ª a 4ª série, 1997, p. 52 e 5ª a 8ª série, 1998, p. 47.

- b) Os blocos não representam discos, nem quadrados, nem retângulos, nem triângulos, mas sólidos em formas de cilindros e em diversas formas de prismas, com duas medidas diferentes de alturas. Desta maneira, essas peças tridimensionais possuem uma de suas vistas com a forma do polígono considerado ou de disco. **(valor: 10,0 pontos)**

Questão nº 8

Padrão de Resposta Esperado:

Um número real x é tal que $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, se, e só se, $(x^2 + \frac{b}{a}x) + \frac{c}{a} = 0$, (valor: 5,0 pontos) ou ainda, se e só se

$$(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0, \text{ ou seja: se e só se } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (\text{valor: 10,0 pontos})$$

Esta igualdade, por sua vez, como $b^2 - 4ac > 0$, é equivalente a: $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e, daí, o resultado pedido. (valor: 5,0 pontos)

Questão nº 9

Padrão de Resposta Esperado:

- a) Verdadeira. (valor: 1,0 ponto) De fato, se r é uma reta de pontos fixos, tem-se $f(A) = A, \forall A \in r$. (valor: 3,0 pontos) Logo $f(r) = r$. (valor: 1,0 ponto)
- b) Recíproca: Se r é uma reta fixa por f , então r é uma reta de pontos fixos por f . (valor: 5,0 pontos)
- c) A recíproca é falsa (valor: 1,0 ponto) pois, por exemplo, no caso de uma translação de um vetor não nulo no plano, qualquer reta paralela a esse vetor é uma reta fixa, mas nenhum de seus pontos é fixo por essa translação. (valor: 9,0 pontos, sendo que se apenas enunciou o contra-exemplo, recebe 5,0 pontos, e se enunciou mas cometeu equívocos para explicar, recebe 7,0 pontos).

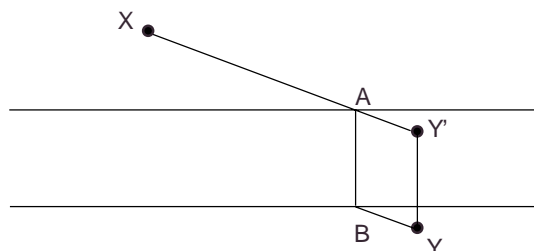
Alternativa: A recíproca é falsa, pois, por exemplo, no caso de uma simetria no plano, toda reta perpendicular ao eixo de simetria é uma reta fixa, mas apenas um de seus pontos é fixo (a intersecção com o eixo); nenhum dos demais pontos o é. (valor: 10,0 pontos)

Obs.: Há muitos outros contra-exemplos.

Questão nº 10

Padrão de Resposta Esperado:

Sendo AB uma distância fixa, o que deve ser minimizada é a soma das distâncias de X a A e de B a Y . (valor: 5,0 pontos)



(valor: 5,0 pontos)

Traça-se por Y uma perpendicular às margens do rio tomando-se nessa perpendicular um ponto Y' tal que a medida do segmento YY' seja igual à largura do rio e o ponto Y' esteja no mesmo semiplano que X em relação à paralela ao rio por Y . O ponto A que resolve o problema é a intersecção do segmento XY' com a margem do rio. Com efeito, a soma das medidas dos segmentos XA e BY é a medida do segmento XY' pois $ABYY'$ é um paralelogramo. (valor: 10,0 pontos)

Alternativa: Ao invés de traçar a perpendicular às margens do rio por Y , traça-se por X e determina-se de modo análogo o ponto B .