LICENCIATURA

Questão 1

a. Como, em ambos os casos, os sistemas estão em repouso, a força que atua sobre a mola única em 1, ou sobre cada mola na associação 2, é a mesma, igual ao peso do corpo pendurado. Sendo idênticas e solicitadas pela mesma força, cada mola sofre o mesmo alongamento Δx (Lei de Hooke). Logo, em 1, como há uma só mola, o alongamento é Δx; em 2, como há três molas em série, o alongamento é $3\Delta x$, correspondente à soma dos alongamentos Δx sofridos em cada mola. **(2,5 pontos)**

b. Da expressão da energia potencial elástica de uma mola, pode-se afirmar que a energia potencial do sistema 1 é:

$$Ep_1 = \frac{1}{2} k \,.\, \Delta x^2 \ (\mathrm{I})$$

onde k é a constante elástica da mola.

Pela mesma expressão, a energia potencial elástica do sistema 2 é:

$$Ep_2 = \frac{1}{2} k' \,.\, (3\Delta x)^2 \Rightarrow Ep_2 = \frac{1}{2} k' \,.\, 9\Delta x^2 \ (\mathrm{II})$$

onde k' é a constante elástica da associação de molas. Para achar a relação entre k e k', pode-se aplicar duas vezes a lei de Hooke, $F = k\Delta x$, aos sistemas 1 e 2.

Sendo $F = P$ o módulo da força que traciona as molas, para o sistema 1 tem-se:

$$P = k \,.\, \Delta x \ (\mathrm{III})$$

e para 2, tem-se:

$$P = k' \,.\, 3\Delta x \ (\mathrm{IV})$$

De III e IV conclui-se que

$$k = 3k' \,. \ (\mathrm{V})$$

Substituindo V em II, pode-se escrever:

$$Ep_2 = 3\left(\frac{1}{2} k \,.\, \Delta x^2\right) \ (\mathrm{VI})$$

Logo, de I e VI conclui-se que

$$Ep_2 = 3Ep_1$$ **(2,5 pontos)**

OU

b. A energia potencial elástica de uma mola é dada por:

$$Ep = \frac{1}{2} k \,(\Delta x)^2 \ (1)$$

Como as três molas são iguais, se a associação sofre um alongamento $3\Delta x$, cada mola sofre um alongamento Δx. A energia potencial elástica da associação será, portanto:

$$Ep_{\ associação} = \frac{1}{2} k \,(\Delta x)^2 + \frac{1}{2} k \,(\Delta x)^2 + \frac{1}{2} k \,(\Delta x)^2$$

$$Ep_{\ associação} = \frac{1}{2} k \,.\, 3 \,(\Delta x)^2 \ (2)$$

De (2) e (1), temos

$Ep_{\text{associação}} = 3\ Ep$ **(2,5 pontos)**

c. Basta mostrar aos alunos que a energia potencial elástica adquirida pela mola do sistema 1 ou pelas molas do sistema 2 depende do trabalho realizado pelo peso P. Esse trabalho, nessa situação elementar, é dado pelo produto da força pelo deslocamento. Como a força é a mesma mas, em 2, o deslocamento é três vezes maior, o trabalho realizado pelo peso do corpo em 2 também é três vezes maior. Logo, a energia potencial elástica acumulada por esse sistema é, também, três vezes maior. **(2,5 pontos)**

Questão 2

a. Esse procedimento faz com que o raio incidente coincida com a normal à superfície cilíndrica, pois a normal também passa por **O**. Dessa forma o raio incidente não sofre desvio ao entrar na superfície semicilíndrica; só ao sair, o que permite o estudo da refração apenas na superfície plana. Isso facilita a medida dos ângulos de incidência e refração e, principalmente, o estudo da reflexão total e do ângulo limite, que só é possível nessas condições, ou seja, quando o raio de luz passa do meio mais refringente para o meio menos refringente. **(2,5 pontos)**

b. Basta colocar o perfil semicilíndrico sobre uma folha de papel para facilitar a medida dos ângulos e, fazendo o raio de luz incidir em **O** com um determinado ângulo θ_i, obter o correspondente ângulo de refração θ_r na saída do raio de luz na face plana da superfície cilíndrica. A razão $\dfrac{\text{sen } \theta_r}{\text{sen } \theta_i}$ dá o valor do índice de refração do acrílico.
Para obter o ângulo limite basta aumentar gradativamente o ângulo de incidência θ_i e observar o aumento do ângulo de refração, θ_r. O valor de θ_i para o qual o feixe refratado desaparece é o ângulo limite. **(2,5 pontos)**

c. No procedimento anterior, observa-se que para qualquer ângulo de incidência θ_i inferior ao ângulo limite, aparecem dois raios de luz na superfície plana, onde o raio emerge. Um refratado, externo, e outro refletido, interno. Fica evidente que à medida que se aumenta o ângulo de incidência θ_i o raio refratado perde intensidade enquanto a intensidade do raio refletido aumenta. Na proximidade do ângulo limite a intensidade do raio refratado praticamente desaparece, enquanto a intensidade do raio refletido aumenta até tornar-se praticamente a mesma do raio incidente quando e a partir da reflexão total. Basta a simples observação da variação das intensidades dos raios refratado e refletido para que o aluno tenha uma boa noção qualitativa da relação entre elas. **(2,5 pontos)**

Questão 3

a. Quando o circuito é fechado, o ramo **YW** da balança é percorrido por uma corrente que, interagindo com o campo magnético gerado pelo ímã em **U**, sofre a ação de uma força vertical, para cima ou para baixo (dependendo das orientações da corrente e do campo magnético) desequilibrando a balança. **(2,5 pontos)**

b. Para medir a intensidade de $\vec{B}$ basta fechar o circuito e reequilibrar a balança colocando um segundo contrapeso **P'** num dos lados da balança, deixando inalterada a posição do contrapeso **P**. Nessas condições, mede-se a intensidade **i** da corrente, o comprimento ℓ do segmento **YW** imerso no campo magnético do ímã, a distância **D** desse segmento a um dos apoios da balança, a massa **m** do contrapeso **P'** e a distância **d** desse contrapeso ao correspondente apoio da balança. Esses dados permitem o cálculo da intensidade do campo magnético $\vec{B}$ onde o ramo **YW** está imerso, que é o campo gerado pelo ímã, ou ímãs, da armação em **U**. **(2,5 pontos)**

c. Ao se reequilibrar a balança colocou-se um contrapeso **P'** num dos seus lados. Vamos supor que seja no lado oposto ao ímã, condição sempre possível conseguir nessa montagem, na qual podem ser obtidas as medidas sugeridas no item b, e analisar o equilíbrio da balança a partir daí.
Assim verifica-se que o momento ou torque do contrapeso **P'** em relação ao apoio da balança é, em módulo, dado por

$$M_P = mgd \;.\; (\mathrm{I})$$

onde g é a aceleração da gravidade. Como a balança está em equilíbrio, pode-se afirmar que esse momento é equilibrado pelo momento M_{FM} da força magnética $\vec{F}_M$ exercido sobre o ramo **YW** da balança, ou seja,

$$M_P = M_{FM} \; (\mathrm{II})$$

O módulo de M_{FM} nessa situação, é

$$M_{FM} = F_M \,.\, D \; (\mathrm{III})$$

Mas, supondo que as linhas do campo magnético $\vec{B}$ do ímã sejam perpendiculares ao segmento **YW**, sendo $\vec{F}_M = i\,\vec{\ell} \times \vec{B}$ pode-se afirmar que, em módulo,

$$F_M = i \,.\, \ell \,.\, B \; (\mathrm{IV})$$

De IV e III, obtém-se:

$$M_{FM} = i \,.\, \ell \,.\, B \,.\, D \; (\mathrm{V})$$

Finalmente, de V e II e I obtém-se

$$mgd = i \,.\, \ell \,.\, B \,.\, D \Rightarrow B = \frac{mgd}{i\ell D} \; (\mathrm{VI})$$

A expressão VI permite o cálculo do módulo de $\vec{B}$ em função dos dados obtidos no procedimento proposto. **(2,5 pontos)**

Questão 4

a. Aristóteles introduziu a idéia de *anti-peristase* que consistia em dizer que o ar empurrado pela parte anterior da flecha ia ocupar o vazio deixado na parte posterior, empurrando-a. Isso posto, o movimento inicial da flecha era violento e necessitava da ação de um agente externo. **(2,5 pontos)**

b. O *impetus* foi proposto por Philoponus no século V. O *impetus* seria algo que se acumularia nos objetos, devido a uma determinada ação neles realizada, e que neles permaneceria mesmo após o fim dessa ação. No caso da flecha, a ação do arco forneceria a ela uma certa quantidade de *impetus*, responsável por garantir seu movimento para o alto. Quando esse *impetus* acabasse, a flecha deixaria de seguir a direção original de lançamento e passaria a cair, seguindo sua tendência natural. **(2,5 pontos)**

c. A forma intuitiva de pensar as causas do movimento associa a velocidade de um corpo à força nele aplicada. Os alunos, em geral, chegam à sala de aula com essas idéias sobre as causas do movimento. Apresentando a idéia do *impetus*, é possível explorar os limites dessa forma de pensar as causas do movimento. **(2,5 pontos)**

Questão 5

a. A experiência de Hertz confirmou a teoria eletromagnética de Maxwell, pois gerou e detectou as ondas eletromagnéticas, uma previsão dessa teoria. **(2,5 pontos)**

b. O meio seria o éter. Esta hipótese não é mais válida porque atualmente sabe-se que as ondas eletromagnética não precisam de um meio material para se propagarem. **(2,5 pontos)**

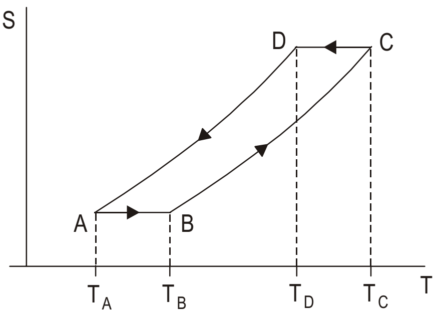
c. Uma das dificuldades de ensinar o conceito de ondas eletromagnéticas é encontrar formas de torná-las perceptíveis por meio de montagens simples. A experiência sugerida permite fazer isso, uma vez que o esfregar do fio na pilha produz um efeito perceptível no rádio, interpretado como ondas eletromagnéticas geradas pelo liga-desliga do curto-circuito provocado pelo fio entre os pólos da pilha. **(2,5 pontos)**

BACHARELADO

Questão 6

a. Como nos processos adiabáticos não há transferência de calor e na transformação isovolumétrica **BC** o gás esquenta, só há transferência de calor para o sistema de refrigeração na transformação isovolumétrica **DA**. **(2,5 pontos)**

b.



Transformações adiabáticas:
$\Delta S = 0$

(2,5 pontos)

c. $PV^{\gamma} = \text{const.} \quad \therefore \quad V^{\gamma-1} = \dfrac{\text{const}}{nRT} \quad \therefore \quad \boxed{TV^{\gamma-1} = \text{const}}$

$PV = nRT$

$$Q_q = nC_V\,(T_C - T_B) \qquad e = \frac{W}{Q_q} = 1 - \frac{Q_f}{Q_q} \quad \therefore \quad e = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

$$Q_f = nC_V\,(T_D - T_A) \qquad ; \quad T_A\,V_2^{\gamma-1} = T_B\,V_1^{\gamma-1} \;\; ; \;\; T_C\,V_1^{\gamma-1} = T_D\,V_2^{\gamma-1}$$

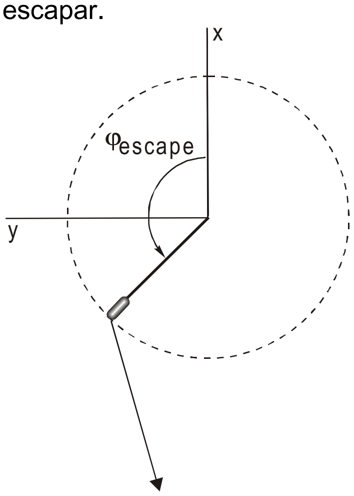
$$\therefore \quad e = 1 - \frac{T_D - T_B\,(V_1 / V_2)^{\gamma-1}}{T_D\,(V_2 / V1)^{\gamma-1} - T_B} \quad = \quad 1 - \frac{T_D - T_B\,(V_1 / V_2)^{\gamma-1}}{\left[T_D - T_B\,(V_1 / V_2)^{\gamma-1}\right]\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}}$$

$$\therefore \quad \boxed{e = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}$$

(2,5 pontos)

Questão 7

a. O anel escapa numa trajetória balística que, vista de cima, é uma reta não tangente ao círculo, porque tem velocidade radial ao escapar.



(2,5 pontos)

b. $\mathbf{x} = \mathbf{r}\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\varphi \;;\quad \mathbf{y} = \mathbf{r}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\varphi \;;\quad \mathbf{z} = \mathbf{h} - \mathbf{r}\cos\alpha$

$$T = \frac{1}{2}\,\mathbf{m}\left[V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}\right] ; \quad V_x = \frac{dx}{dt} = \text{sen}\,\alpha\,\cos\varphi\,\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\therefore \quad V_x = \text{sen}\,\alpha\,\cos\varphi\,\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\,\omega\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\varphi$$

$$V_y = \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\varphi\,\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r}\,\omega\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\varphi$$

$$V_z = -\cos\alpha\,\dot{\mathbf{r}}$$

$\therefore$

$$T = \frac{1}{2}\,\mathbf{m}\left[\text{sen}^2\alpha\,\cos^2\varphi\,\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}^2\,\omega^2\,\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\varphi - 2\,\mathbf{r}\,\omega\,\text{sen}^2\alpha\,\cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi\,\dot{\mathbf{r}} + \right.$$

$$+\,\text{sen}^2\,\alpha\,\text{sen}^2\,\varphi\,\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}^2\,\omega^2\,\text{sen}^2\,\alpha\cos^2\varphi + 2\,\mathbf{r}\,\omega\,\text{sen}^2\,\alpha\cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi\,\dot{\mathbf{r}} +$$

$$\left. + \cos^2\alpha\,\dot{\mathbf{r}}^2\right] = \frac{1}{2}\mathbf{m}\left[\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}^2\,\omega^2\,\text{sen}^2\,\alpha\right]$$

$$\mathbf{U} = \text{mg}\,[\mathbf{h} - \mathbf{r}\cos\alpha]$$

$$\therefore \quad \boxed{L = \frac{1}{2}\mathbf{m}\left(\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}^2\,\omega^2\,\text{sen}^2\,\alpha\right) - \text{mg}\,[\mathbf{h} - \mathbf{r}\cos\alpha]}$$

(2,5 pontos)

c. $$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial}{\partial t}\left[m\,\dot{r}\right] - m\,r\,\omega^2\,\text{sen}^2\,\alpha - \text{mg}\,\cos\alpha = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2 r}{dt^2} - r\,\omega^2\,\text{sen}^2\,\alpha - g\,\cos\alpha = 0$$

ou $$\boxed{\frac{d^2 r}{dt^2} - r\,\omega^2\,\text{sen}^2\,\alpha - g.\cos\,\alpha = 0}$$

(2,5 pontos)

Questão 8

a. $$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \therefore \quad \left(\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial_z}\right)\times\left[\vec{E}_0\,e^{i(kz-\omega t)}\right] = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{H}_0\,e^{i(kz-\omega t)}\right]$$

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \therefore \quad \left(\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left[\vec{H}_0\,e^{i(kz-\omega t)}\right] = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E}_0\,e^{i(kz-\omega t)}\right]$$

$$\therefore \quad ik\,\hat{e}_z\times\vec{E}_0\,e^{i(kz-\omega t)} = -\mu\,(-i\omega)\vec{H}_0\,e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\therefore \quad ik\,\hat{e}_z\times\vec{H}_0\,e^{i(kz-\omega t)} = \varepsilon\,(-i\omega)\vec{E}_0\,e^{i(kz-\omega t)} \quad \therefore \quad \boxed{\begin{aligned}\vec{k}\times\vec{E}_0 &= \omega\,\mu\,\vec{H}_0\\ \vec{k}\times\vec{H}_0 &= -\omega\,\varepsilon\,\vec{E}_0\end{aligned}}$$

(2,5 pontos)

b. $$\vec{E}_0 = E_0\,\hat{e}_x \quad \therefore \quad k\,\hat{e}_z\times E_0\,\hat{e}_x = \omega\,\mu\,\vec{H}_0 \quad \therefore \quad \vec{H}_0 = \frac{k}{\omega\,\mu}E_0\,\hat{e}_y$$

$$k\,\hat{e}_z\times\vec{H}_0 = -\omega\,\varepsilon\,E_0\,\hat{e}_x \quad \therefore \quad \vec{H}_0 = \frac{\omega\,\varepsilon}{k}E_0\,\hat{e}_y$$

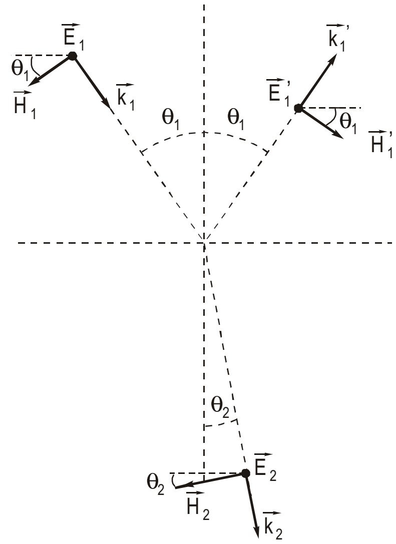
∴

(i) $\varepsilon \rangle 0$; $\mu \rangle 0$: $\vec{H}_0$ na direção e sentido positivo do eixo y
(ii) $\varepsilon \langle 0$; $\mu \langle 0$: $\vec{H}_0$ na direção do eixo y, mas no sentido negativo de y negativo

$$\therefore \quad \frac{k}{\omega\,\mu}E_0 = \frac{\omega\,t}{k}E_0 \quad \therefore \quad \frac{k^2}{\omega^2\,\varepsilon\,\mu} = 1 \quad \therefore \quad \frac{k^2}{\omega^2\,\varepsilon_0\,\mu_0} = \varepsilon_r\,\mu_r$$

$$n^2 = \frac{c^2}{V_f^{\,2}} = \left(\frac{c}{\omega / k}\right)^2 \quad \therefore \quad \boxed{n^2 = \varepsilon_r \, \mu_r}$$ **(2,5 pontos)**

c. Na interface:



$$E_1 + E_1' = E_2$$

$$\left[\begin{array}{l} H_1 \cos\,\theta_1 - H_1' \cos\,\theta_1 = H_2 \cos\,\theta_2 \\ \mu_1 H_1 \,\text{sen}\,\theta_1 + \mu_1 H_1' \,\text{sen}\,\theta_1 = \mu_2 H_2 \,\text{sen}\,\theta_2 \end{array}\right]$$

> 0

$\therefore\ \mu_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 < 0$ para que estas

e equações continuem

$\mu_1 > 0 \qquad n < 0$ sendo satisfeitas

Questão 9

a. Como $\phi_0(x)$ e $\phi_1(x)$ são as autofunções dos estados com energias E_0 e E_1, e $P \alpha |\psi|^2$, tem-se

probabilidade de encontrar o sistema no estado E_0: $P_0 = \frac{1}{5}$

probabilidade de encontrar o sistema no estado E_1: $P_1 = \frac{4}{5}$

$$\therefore\ \langle E \rangle = P_0 E_0 + P_1 E_1 \quad \therefore\ \langle E \rangle = \frac{1}{5}\frac{\hbar\,\omega_0}{2} + \frac{4}{5}\frac{3\,\hbar\,\omega_0}{2} \quad \therefore\ \langle E \rangle = \frac{13}{10}\hbar\,\omega_0$$ **(2,5 pontos)**

b. $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + \frac{1}{2} m\,\omega_0^2\, x^2\, \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$$

$$\psi(x,t) = \phi_n(x)\; e^{-\frac{i E_n}{\hbar} t} \quad \therefore \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\,i\,\frac{E_n}{\hbar}\,\phi_n(x)\; e^{-\frac{i E_n}{\hbar} t}$$

$$\therefore\ -\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{d^2\phi_n}{dx^2} + \frac{1}{2} m\,\omega_0^2\, x^2\, \phi_n(x) = E_n\, \phi_n(x)$$

$$\therefore\ \frac{d^2\phi_0}{dx^2} = 4\,\alpha^2\, x^2\, \phi_0(x) - 2\alpha e^{-\alpha x^2}$$

$$\therefore\ -\frac{\hbar^2}{2\,m}\cdot 4\,\alpha^2\, x^2 + \frac{\hbar^2}{2\,m} 2\alpha + \frac{1}{2} m\,\omega_0^2\, x^2 = \frac{\hbar\,\omega_0}{2}$$

$$\therefore\ \alpha\,\frac{\hbar^2}{m} = \frac{\hbar\,\omega_0}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\alpha = \frac{m\,\omega_0}{2\,\hbar}}$$ **(2,5 pontos)**

c. $$\boxed{\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{m\,\omega_0}{\hbar\,\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\,\omega_0}{2\,\hbar}x^2 - i\frac{\omega_0}{2}t} + 2\left(4\,\frac{m^3\,\omega_0^{\,3}}{\hbar^3\,\pi}\right)^{\frac{1}{4}} x^2\, e^{-\frac{m\,\omega_0}{2\,\hbar}x^2 - i\frac{3\,\omega_0\,t}{2}}\right]}$$ **(2,5 pontos)**

O valor de $\langle E \rangle$ não se altera porque a função potencial é independente do tempo.

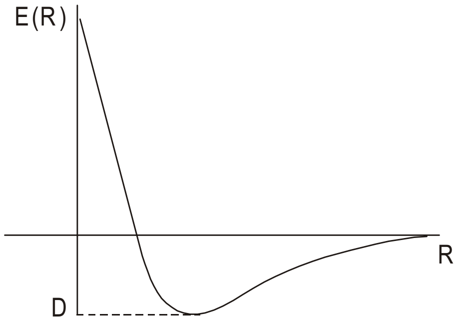
Obs.: b - Se escrever a expressão em termos de (ϕ_0, E_0) e (ϕ_1, E_1) **(2,5 pontos)**

Questão 10

a. $E(R) = -A\left(\frac{R_0}{R}\right)^6 + B\left(\frac{R_0}{R}\right)^{12}$

$R \to 0 \quad \Rightarrow \quad E(R) \to +\infty$

$R \to \infty \quad \Rightarrow \quad E(R) \to 0^{(-)}$



(2,5 pontos)

b. **Equilíbrio**

$$\frac{dE}{dR} = 0 \quad \therefore \quad +6A\frac{R_0^{\,6}}{R^7} - 12B\frac{R_0^{\,12}}{R^{13}} = 0 \quad \therefore \quad 6A = 12B\frac{R_0^{\,6}}{R^6}$$

$$\therefore \quad \frac{R}{R_0} = \left[\frac{2B}{A}\right]^{\frac{1}{6}} \quad \therefore \quad \boxed{R_{eq} = R_0 = 1{,}0 \times 10^{-10}\ \text{m}}$$

$$|D| = |E(R_{eq})| = |-A + B| \quad \therefore \quad \boxed{D = 8{,}0 \times 10^{-19}\ \text{J}}$$

(2,5 pontos)

c. **Vibração**

$$\frac{d^2E}{dR^2} = -42A\frac{R_0^{\,6}}{R_0^{\,8}} + 12\times 13B\frac{R_0^{\,12}}{R_0^{\,14}} = -42A\ \frac{1}{R_0^{\,2}} + 12\times 13B\ \frac{1}{R_0^{\,2}} = 5{,}76\times 10^3\,\text{kg}\,\text{s}^{-2}$$

$$M\omega_0^{\,2} = 5{,}76\times 10^3\ \text{s}^{-2}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{5{,}76\times 10^3}{M}}\ \text{s}^{-1}}$$

(2,5 pontos)