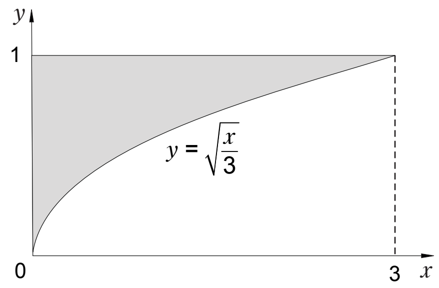
Questão 1

Padrão de Resposta Esperado

a) A região de integração é a região hachurada em:

$0 \leq x \leq 3$ e $\sqrt{\frac{x}{3}} \leq y \leq 1$:



(valor: 5,0 pontos)

b) $I = \int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}\, dydx = \int_0^1 \int_0^{3y^2} e^{y^3}\, dxdy$ **(valor: 10,0 pontos)**

c) $I = \int_0^1 e^{y^3} .\, x\Big|_0^{3y^2}\, dy = \int_0^1 3y^2 .\, e^{y^3}\, dy = e^{y^3}\Big|_0^1 = e - 1.$ **(valor: 5,0 pontos)**

Questão 2

Padrão de Resposta Esperado

a) Os elementos do grupo G são as classes a que pertencem os números primos com 18, ou seja:

$G = \{\overline{1}\,;\ \overline{5}\,;\overline{7}\,;\overline{11};\overline{13}\,;\overline{17}\}.$ **(valor: 10,0 pontos)**

b) De fato, $g = \overline{5}$, pois $5^0 = 1 \equiv 1 \pmod{18}$; $5^1 = 5 \equiv 5 \pmod{18}$; $5^2 = 25 \equiv 7 \pmod{18}$; $5^3 \equiv 7 \times 5 = 35 \equiv 17 \pmod{18}$; $5^4 \equiv 5 \times 17 = 85 \equiv 13 \pmod{18}$ e $5^5 \equiv 5 \times 13 = 65 \equiv 11 \pmod{18}$ **(valor: 10,0 pontos)**

Questão 3

Padrão de Resposta Esperado

a) $f(x,y) = [x,y] \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x \quad y] \begin{bmatrix} x + 6y \\ 6x - 4y \end{bmatrix} = \quad x^2 + 6xy + 6xy - 4y^2$, isto é:

$f(x,y) = x^2 + 12xy - 4y^2.$ **(valor: 5,0 pontos)**

b) Para achar os autovalores de A, resolvemos a equação $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ou $(\lambda - 5)(\lambda + 8) = 0$, obtendo $\lambda = 5$ e $\lambda = -8$.

Para $\lambda = 5$, um autovetor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ satisfaz $-4x + 6y = 0$, ou seja, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é um múltiplo de $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Para $\lambda = -8$, um autovetor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ satisfaz $9x + 6y = 0$, ou seja, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é um múltiplo de $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Portanto, um par de autovetores ortonormais de A é $\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ e $\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$

Basta, então, tomar $P = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}3 & -2\\2 & 3\end{bmatrix}$; como P é ortogonal, $P^{-1} = P^{t}$. De fato: $P^{-1}AP =$

$$\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\6 & -4\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}3 & -2\\2 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}15 & 16\\10 & -24\end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}65 & 0\\0 & -104\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 0\\0 & -8\end{bmatrix}$$ que é uma matriz diagonal.

(valor: 10,0 pontos)

c) Se $[\,x \;\; y\,] = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}3 & -2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{bmatrix}$ então $f(x,y) = v^t A\, v = (P\tilde{v})^t AP\tilde{v} = \tilde{v}^t P^t APv = \tilde{v}^t\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & -8\end{bmatrix}\tilde{v} = 5\tilde{x}^2 - 8\tilde{y}^2$. **(valor: 5,0 pontos)**

Observação: O graduando não é obrigado a seguir a sugestão de usar autovetores ortonormais, podendo usar autovetores ortogonais; isso permitiria, no item **c)**, respostas da forma $k(5\tilde{x}^2 - 8\tilde{y}^2)$, k positivo.

Questão 4

Padrão de Resposta Esperado

a) $p(x)$ é de grau n e $p'(x)$ de grau $n-1$, logo $q(x)$ deve ser do 1° grau, isto é, da forma $q(x) = ax + b$.

Sendo $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (ax+b)\,[nx^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1]$, efetuando-se o produto e igualando-se os coeficientes de x^n, obtém-se: $a.n = 1$, donde $a = 1/n$. Fazendo-se $x_0 = -\,b.n$, tem-se $q(x) = \frac{1}{n}(x - x_0)$. **(valor: 5,0 pontos)**

b) Da equação $qp' - p = 0$ temos $(x - x_0)\,p' - np = 0$, que é uma equação diferencial de variáveis separáveis. Nos pontos em que $p \neq 0$ e $x \neq x_0$ é possível separar as variáveis, fazendo a divisão por $(x - x_0)p$:

$\frac{p'}{p} = \frac{n}{x - x_0}$, cuja solução é: $ln|p| = n\, ln\,|x - x_0| + c$ ou $|\,p(x)\,| = k\,.\,|\,x - x_0\,|^n$ para uma constante k positiva ou $p(x) = k\,(x - x_0)^n$ para uma constante real não nula qualquer. **(valor: 15,0 pontos)**

Observações: A solução $p \equiv 0$ é solução dessa equação, mas tem a derivada identicamente nula, não satisfazendo, portanto, a condição do problema dado. Nos outros casos, por continuidade ou verificação direta, $p(x)$ é solução da equação mesmo no ponto x_0 em que se anula. Tem-se, então, que todos os polinômios da forma $k\,(x - x_0)^n$, com $k \neq 0$, são divisíveis por sua derivada e, pelo raciocínio acima, só estes satisfazem essa propriedade.

Questão 5

Padrão de Resposta Esperado

a) $div(fX) = \frac{\partial(f\,.\,X_1)}{\partial x} + \frac{\partial(f\,.\,X_2)}{\partial y} + \frac{\partial(f\,.\,X_3)}{\partial z} = f\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}X_1 + \frac{\partial f}{\partial y}X_2 + \frac{\partial f}{\partial z}X_3 = f\; div\,X + \nabla f \cdot X$ **(valor: 5,0 pontos)**

b) $div\,(f\nabla f) = f\; div\,\nabla f + \nabla f \cdot \nabla f = f\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\partial z}\right) + \|\nabla f\|^2 = f\,\Delta f + \|\nabla f\|^2.$ **(valor: 5,0 pontos)**

c) $\int_S \frac{\partial f}{\partial N}\, dS = \int_S \nabla f \cdot N\, dS$ e, pelo Teorema de Gauss–Ostrogradsky, segue

$\int_S \nabla f \cdot N\, dS = \int_{\bar{B}} div\ \nabla\ f\ dV$, onde dV é o elemento de volume de $\bar{B}$.

Substituindo, na fórmula no item **b)**, as condições do item **c)**, tem-se $5f = f\, div\ \nabla f + \Delta f \cdot \Delta f = f\, div\ \nabla f + \|\nabla f\|^2 = f\, div\ \nabla f + 2f$.

Daqui, sendo f não nula, $div\ \nabla f = 3$. Donde:

$\int_{\bar{B}} div\ \nabla f\ dV = 3 \int_{\bar{B}} dV = 3.\frac{4\pi}{3} = 4\pi.$ **(valor: 10,0 pontos)**

Questão 6

Padrão de Resposta Esperado

a) De fato, multiplicando $0 < x < 2$ por $x > 0$, tem-se $0 < x^2 < 2x$. Multiplicando-se $0 < x < 2$ por 2 tem-se $0 < 2x < 4$, donde

$0 < x^2 < 2x < 4$ e, considerando as raízes quadradas $0 < x < f(x) < 2$. **(valor: 5,0 pontos)**

b) Mostremos que, pela definição e pelo item **a)**, a seqüência a_n está bem definida e é crescente e limitada superiormente.
Com efeito, $a_1 = \sqrt{2}$, então $0 < a_1 < 2$. Tem-se que a_2 está bem definido e $0 < a_1 < a_2 < 2$. Suponhamos que $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-1} < 2$; novamente, tem-se pelo item **a)** que a_n está bem definido e $0 < a_{n-1} < a_n < 2$. Ou seja, a seqüência dada é crescente e limitada superiormente (2 é cota superior), sendo, portanto, convergente. **(valor: 5,0 pontos)**

c) O limite existe e pertence ao intervalo $]\sqrt{2}, 2]$. Além disso, pela continuidade de f, obtém-se $\lim a_{n+1} = \lim f(a_n) = f(\lim a_n)$ ou seja, $\lim a_n = f(\lim a_n)$. Assim, $\lim a_n$ é uma solução da equação $x = f(x)$, no intervalo $]\sqrt{2}, 2]$. Ora, as soluções de $x = \sqrt{2x}$ são as soluções de $x^2 = 2x$, que são 0 e 2, logo a única solução no intervalo em questão é 2, donde $\lim a_n = 2$. **(valor: 10,0 pontos)**

2ª alternativa de solução:

b) $a_1 = 2^{1/2}$; $a_2 = (2^{1/2+1})^{1/2} = 2^{1/2(1+1/2)}$; mostraremos por indução que a seqüência constitui-se de potências com base 2 cujos expoentes são as reduzidas (somas parciais) da série geométrica de razão e 1° termo iguais a ½. Com efeito, supondo que

$a_n = 2^{\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right]}$, teremos $a_{n+1} = \left[2^{1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right)}$.

Sendo convergente a série dos expoentes (série geométrica de razão ½ < 1), pela continuidade da exponencial de base 2, segue que a seqüência a_n é convergente.

c) Pela continuidade da exponencial, o limite em questão é: $\lim a_n = 2^{\lim\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}\right)\right]}$
Como

$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$, tem-se afinal: $\lim a_n = 2$.

3ª alternativa de solução:

b) Pelo item **a)**, a função f leva o intervalo [$\sqrt{2}$, 2] nele próprio e, sendo $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, tem-se que $f'(x)$ é positiva e decrescente, então, no intervalo em questão, $|f'(x)| \leq f'(\sqrt{2}) < 0{,}6 < 1$. Ou seja, f é uma contração do intervalo [$\sqrt{2}$, 2] nele mesmo e, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, qualquer seqüência definida por $a_{n+1} = f(a_n)$ com $a_1 \in [\sqrt{2}, 2]$ converge para o único ponto fixo dessa contração nesse intervalo.

c) Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, esse limite é o único ponto fixo da contração f no intervalo [$\sqrt{2}$, 2]. Calculando as soluções de $x = \sqrt{2x}$, tem-se que elas são as soluções de $x^2 = 2x$, que são 0 e 2. O ponto fixo no intervalo em questão é, portanto, $x = 2$, donde $\lim a_n = 2$.

Observação: Uma **4ª alternativa** será refazer a prova do Teorema do Ponto Fixo de Banach, para este caso especificamente, mostrando que a seqüência dos a_n é de Cauchy, usando um majorante menor que 1 para a derivada de f, que, no caso, pode ser 0,6. Prova-se que $0 < a_{n+p} - a_n < (0{,}6^{n+p+2} + 0{,}6^{n+p-3} + \ldots + 0{,}6^{n} + 0{,}6^{n-1})(a_2 - a_1)$ e os demais resultados se seguem de raciocínios análogos.

5ª alternativa de solução:

Provaremos diretamente que $\lim a_n = 2$.

Primeiramente, observemos que $a_1 \geq \sqrt{2}$ e que, se $a_n \geq \sqrt{2}$, então $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \geq \sqrt{2\sqrt{2}} \geq \sqrt{2}$, o que prova, por indução, que $a_n \geq \sqrt{2}$ para todo n natural.

$$|a_n - 2| = \left|\sqrt{2a_{n-1}} - 2\right| = \sqrt{2}\left|\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2}\,\frac{|a_{n-1} - 2|}{\left|\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{2}\right|} \leq \sqrt{2}\,\frac{|a_{n-1} - 2|}{2\sqrt{2}} = \frac{|a_{n-1} - 2|}{2}.$$

Daí, $0 \leq |a_n - 2| \leq \frac{|a_1 - 2|}{2^{n-1}}$ para todo n natural, e, pelo teorema do confronto (sanduíche), $\lim a_n = 2$.

Questão 7

Padrão de Resposta Esperado

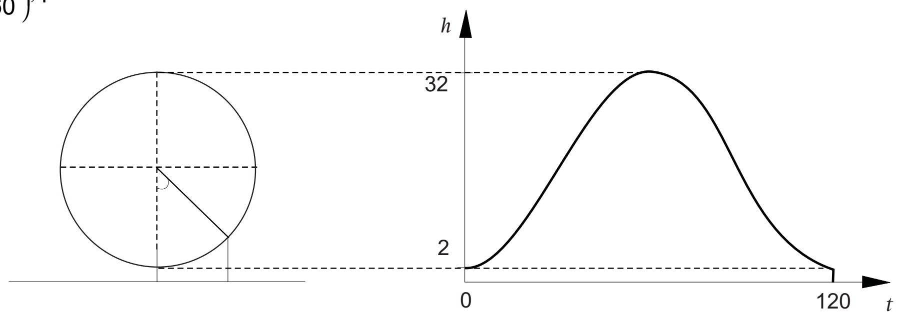
a) A altura máxima será igual a $2 + 30 = 32$ metros. A velocidade angular será de $\frac{2\pi}{120} = \frac{\pi}{60}$ rad/s. **(valor: 5,0 pontos)**

b) É falsa porque a altura do passageiro para $t = 15s$ será igual a $2 + 15 - 15\,cos\left(15\,.\,\frac{\pi}{60}\right) = 2 + \left(15 - 15\,.\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cong 6{,}4\,\text{m} < 8\,\text{m}$.

(valor: 5,0 pontos)

c) Aos $75s$ a altura será igual a $2 + 15 - 15\ cos\ \left(75\,.\,\frac{\pi}{60}\right) = 2 + 15 + 15\,.\,\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 27{,}6$ m. **(valor: 5,0 pontos)**

d) $h(t) = 17 - 15\,.\,cos\left(\frac{\pi t}{60}\right)$, para t entre 0 e 120.



(valor: 5,0 pontos)

Questão 8

Padrão de Resposta Esperado

a) Fazendo $u = bt$, tem-se: $dt = \frac{du}{b}$; $u = b$, se $t = 1$; $u = ab$, se $t = a$. Daí, $\int_1^a \frac{1}{t}\,dt = \int_b^{ab} \frac{b}{u}\cdot\frac{du}{b} = \int_b^{ab} \frac{du}{u} = \int_b^{ab} \frac{1}{t}\,dt$. **(valor: 10,0 pontos)**

b) $ln\ (ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_1^{b} \frac{1}{t}dt + \int_b^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_1^{b} \frac{1}{t}dt + \int_1^{a} \frac{1}{t}dt = ln\ (b) + ln\ (a).$ **(valor: 10,0 pontos)**

Questão 9

Padrão de Resposta Esperado

a) Seja F o número de faces e A o número de arestas do poliedro em questão. A soma dos ângulos internos de cada face é igual a $(n - 2)\,.\,180°$, onde n é o número de lados dessa face. A soma S de todos os ângulos internos de todas as faces do poliedro será:

$S = \sum_{k=1}^{F}(n_k - 2)\,180°$. Mas $\sum_{k=1}^{F}(n_k - 2)\,180° = 180°.\sum_{k=1}^{F} n_k - F\,.\,360° = 2A\,.\,180° - F\,.\,360° = 360°\,.\,(A - F)$ porque cada aresta do poliedro é lado de 2 de suas faces. A fórmula acima agora segue da aplicação da Fórmula de Euler:

$V + F = A + 2$, ou: $A - F = V - 2$. **(valor: 10,0 pontos)**

b) $V = A + 2 - F = 15 + 2 - 12 = 5$. **(valor: 5,0 pontos)**

c) Ainda que fosse possível que cada par destes 5 vértices fosse ligado por uma aresta, o número máximo de arestas seria

$C_5^2 = (5.4)/2 = 10 < 15$. **(valor: 5,0 pontos)**

Questão 10

Padrão de Resposta Esperado

a) De acordo com os PCN, os jogos
1) são objetos socioculturais em que a Matemática está presente;
2) são atividades naturais no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos;
3) exploram o “fazer sem obrigação externa e imposta”;
4) podem ser usados, para crianças, como jogos de exercícios para atenuar a dificuldade com a repetição de atividades;
5) ajudam no trabalho com símbolos, convenções e regras;
6) desenvolvem a percepção da dependência da jogada do outro, o que dá lugar a um tipo de análise mais profunda, com estudo de vários casos;
7) representam uma conquista cognitiva, emocional, moral e social;
8) constituem um desafio genuíno e provocante que gera interesse e prazer. **(valor: 5,0 pontos)**

b) Se o primeiro jogador escolhe x, $1 \leq x \leq 7$, a soma passará a ser $32 + x$. Essa soma está compreendida entre 33 (inclusive) e 39 (inclusive). Bastará ao segundo jogador escolher $8 - x$, o que é permitido porque $8 - x$ está compreendido entre 1 (inclusive) e 7 (inclusive), e anunciará a soma $32 + x + 8 - x = 40$, ganhando o jogo. **(valor: 5,0 pontos)**

c) 32 é posição ganhadora, conforme exposto no item anterior. Raciocínio análogo mostra que são ganhadoras as posições 24, 16, 8. O segundo jogador pode ganhar sempre, respondendo a cada escolha x do adversário com a escolha $8 - x$.
(valor: 5,0 pontos)

d) Progressões aritméticas. **(valor: 5,0 pontos)**

Questão 11

Padrão de Resposta Esperado

Nessa questão, espera-se que o formando escolha uma estratégia e defenda coerentemente essa estratégia. Por exemplo:

- Uma possível justificativa para o início do estudo da Geometria pelos objetos tridimensionais é que estes são parte integrante da realidade do aluno: ele lida com caixas, joga bola, usa latas, etc. A aprendizagem se torna mais fácil ao lidar com objetos concretos do que com abstrações, as quais não devem preceder os exemplos concretos. A partir daí são introduzidas as figuras de dimensão menor como faces, arestas e vértices de poliedros, etc.
- A ordem de Euclides permite mais facilmente um encadeamento lógico. Uma possível justificativa para a ordem de Euclides é que o aluno também lida com paredes, tampos de mesas, letras, etc. que servem como modelos concretos de conceitos abstratos.

(valor: 20,0 pontos)

Questão 12

Padrão de Resposta Esperado

a) Cabri (programa francês *Cabri – Géomètre*), GEOPLAN, *Geometer’s Sketchpad*, *Cinderella*, *Geometric SuperSupposer*, *Geometry Inventor* são alguns deles. Em linhas gerais, cada um deles, de acordo com seus recursos, traça figuras como se usássemos régua e compasso; permite a transformação de figuras, mantendo propriedades selecionadas e fornece medidas. **(valor: 10,0 pontos)**

b) Deverão ser indicadas duas vantagens, como por exemplo:
- seu caráter exploratório;
- a facilidade de construir uma grande quantidade de exemplos, com escalas mais precisas;
- visualização do resultado da aplicação de transformações. **(valor: 5,0 pontos)**

c) Poderá ser apresentado qualquer dos exemplos a seguir.
“Num triângulo isósceles, a altura, a mediana e a mediatriz relativas ao lado diferente coincidem.”
“Em qualquer triângulo, as alturas relativas aos 3 lados se encontram num mesmo ponto”. Propriedades análogas para bissetrizes, medianas e mediatrizes.
“Um quadrilátero com 4 lados congruentes pode não ter os 4 ângulos congruentes.”
“Um triângulo com os 3 lados congruentes tem, necessariamente, os 3 ângulos congruentes.”
“Num plano, o lugar geométrico dos pontos cuja soma da distância a dois outros é constante é uma elipse.” **(valor: 5,0 pontos)**