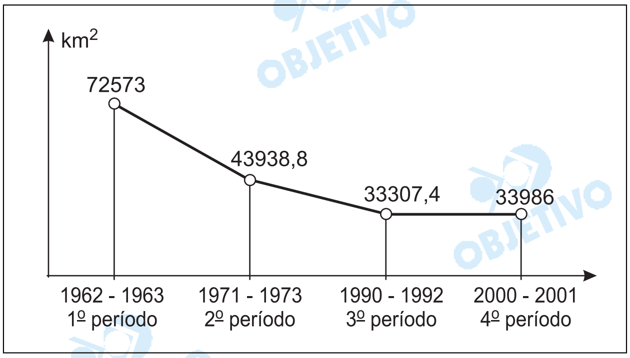
# MATEMÁTICA

## 37 d

No gráfico abaixo, tem-se a evolução da área da vegetação nativa paulista, em quilômetros quadrados, nos períodos indicados. (Fonte: **Folha de S. Paulo, 04/10/2002**)




A área, no 4º período, apresenta

a) uma diminuição de 38 587 000 $m^2$ em relação à do 1º período.

b) uma diminuição de 39 697 000 000 $m^2$ em relação à do 1º período.

c) uma diminuição de 9 952 800 $m^2$ em relação à do 2º período.

d) um aumento de 678 600 000 $m^2$ em relação à do 3º período.

e) um aumento de 678 600 $m^2$ em relação à do 3º período.

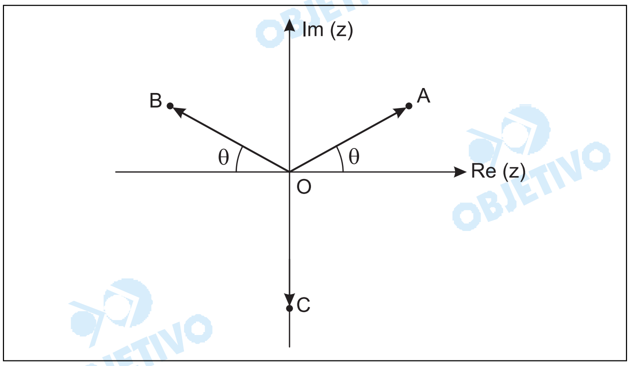
**Resolução**

*Como 33 986 $km^2$ – 33307,4$km^2$ =*

*= 678,6$km^2$ = 678 600 000$m^2$, a área, no 4º período, apresentou um aumento de 678 600 000$m^2$ em relação à do 3º período.*

## 38 a

Na figura abaixo, os pontos A, B e C são as imagens dos números complexos $z_1$, $z_2$ e $z_3$, no plano de Argand-Gauss.

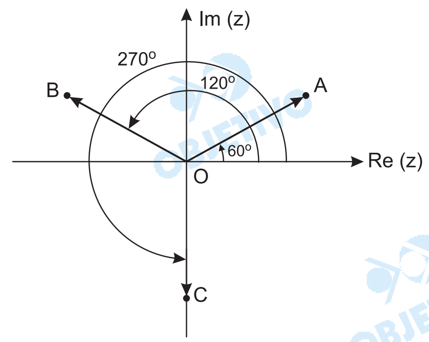



Se $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt{3}$ e $\theta = 60°$, então $z_1 + z_2 + z_3$ é igual a

a) $(3 - \sqrt{3})i$ b) $3 - \sqrt{3}\,i$ c) $(3 + \sqrt{3})i$
d) $3 + \sqrt{3}\,i$ e) $3i - \sqrt{3}$

**Resolução**

*De acordo com o enunciado, temos a figura:*




*Sendo* $OA = OB = OC = \sqrt{3}$, *resulta:*

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{3}\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) \\ z_2 = \sqrt{3}\,(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) \\ z_3 = \sqrt{3}\,(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + i \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ z_2 = \sqrt{3}\left(-\dfrac{1}{2} + i \,.\, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ z_3 = \sqrt{3}\,(0 - i) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\,i \\ z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\,i \\ z_3 = -\sqrt{3}\,i \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 3i - \sqrt{3}\,i = (3 - \sqrt{3})i$$

## 39 a

Dois viajantes partem juntos, a pé, de uma cidade A para uma cidade B, por uma mesma estrada. O primeiro anda 12 quilômetros por dia. O segundo anda 10 quilômetros no primeiro dia e daí acelera o passo, em meio quilômetro a cada dia que segue.

Nessas condições, é verdade que o segundo

a) alcançará o primeiro no 9º dia.

b) alcançará o primeiro no 5º dia.
c) nunca alcançará o primeiro.
d) alcançará o primeiro antes de 8 dias.
e) alcançará o primeiro no 11º dia.

**Resolução**

1) *O primeiro viajante anda 12km por dia. Ao final de **n** dias, terá andado (12n)km.*
2) *O segundo viajante anda, por dia, distâncias que, em km, são termos da progressão aritmética (10; 10,5; 11; ...; $a_n$; ...), em que*

$$a_n = 10 + (n-1) \cdot 0{,}5 \Leftrightarrow a_n = 0{,}5\,n + 9{,}5$$

*Ao final de **n** dias, terá andado*

$$\frac{(10 + 0{,}5n + 9{,}5)\,n}{2} = \frac{19{,}5n + 0{,}5n^2}{2}$$

3) *O segundo alcançará o primeiro quando*

$$\frac{19{,}5n + 0{,}5n^2}{2} = 12n \Leftrightarrow 0{,}5n^2 - 4{,}5n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 9, \text{ pois } n > 0$$

## 40 a

O valor da expressão $y = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4}$, para $x = \sqrt{2}$, é

a) $\sqrt{2} - 2$ b) $\sqrt{2} + 2$ c) 2

d) – 0,75 e) $\dfrac{-4}{3}$

**Resolução**

$$y = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4} = \frac{(x-2) \cdot (x^2 + 2x + 4)}{(x^2 + 2x + 4)} = x - 2$$

*Para* $x = \sqrt{2}$, *temos:* $y = x - 2 = \sqrt{2} - 2$

## 41 b

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{bmatrix}$ tal que $A^2 = \begin{bmatrix} -19 & -8 \\ 10 & -19 \end{bmatrix}$.

É verdade que a + b é igual a

a) 0 b) 1 c) 9 d) – 1 e) – 9

**Resolução**

*I) Sendo* $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{bmatrix}$, *temos*

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab + 1 & 2b \\ 2a & ab + 1 \end{bmatrix}$$

*II) Sabendo que* $A^2$ *é tal que* $A^2 = \begin{bmatrix} -19 & -8 \\ 10 & -19 \end{bmatrix}$,

*devemos ter:*

$$\begin{cases} ab + 1 = -19 \\ 2b = -8 \\ 2a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -4 \end{cases}$$

*Logo, a + b = 1*

## 42 c

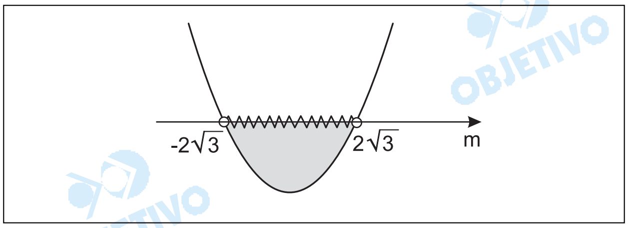
A função f do 2º grau, definida por $f(x) = 3x^2 + mx + 1$, não admite raízes reais se, e somente se, o número real m for tal que

a) $-12 < m < 12$
b) $-3\sqrt{2} < m < 3\sqrt{2}$
c) $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$
d) $m < -3\sqrt{2}$ ou $m > 3\sqrt{2}$
e) $m < -2\sqrt{3}$ ou $m > 2\sqrt{3}$

**Resolução**

*$f(x) = 3x^2 + mx + 1$ não admite raízes reais quando e somente quando $\Delta < 0$:*

*Assim: $\Delta = m^2 - 12 < 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$*




## 43 e

Seja f a função logarítmica dada por $f(x) = \log x$, para todo número real $x > 0$. Então

a) o gráfico de f é simétrico ao gráfico da função g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 10^{-x}$.
b) $f[(x + y)^2] = 2f(x) + 2f(y)$, x e y reais positivos.
c) o gráfico de f é simétrico ao da sua inversa $f^{-1}$, em relação à reta $y = -x$.
d) $|f(x)| = f(x)$ se, e somente se, $0 < x < 10$.
e) $f^{-1}(x + y) = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)$, quaisquer x e y reais.

**Resolução**

*Para $x > 0$, se $f(x) = \log_{10}x$, então $f^{-1}(x) = 10^x$.*

*Logo, $f^{-1}(x + y) = 10^{x+y} = 10^x \cdot 10^y = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)$*

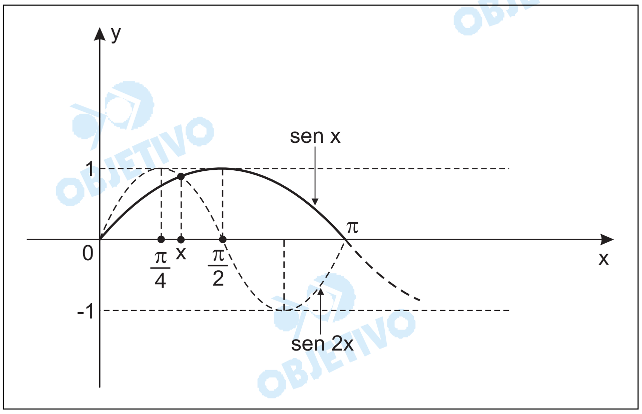
## 44 b

No intervalo $]0, \pi[$, os gráficos das funções definidas por $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$ interceptam-se em um único ponto.

A abscissa x desse ponto é tal que

a) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$
b) $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$
c) $x = \dfrac{\pi}{4}$
d) $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{4}$
e) $\dfrac{3\pi}{4} < x < 2\pi$

**Resolução**




*A partir do gráfico, conclui-se que as funções interceptam-se em um ponto com abscissa x, tal que*

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

## 45 e

Em um paralelogramo ABCD, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ medem, respectivamente, $x\sqrt{2}$ cm e x cm, e θ é o ângulo agudo formado por esses lados. Se a diagonal maior mede 2x cm, então o ângulo θ é tal que

a) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$

b) $\text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

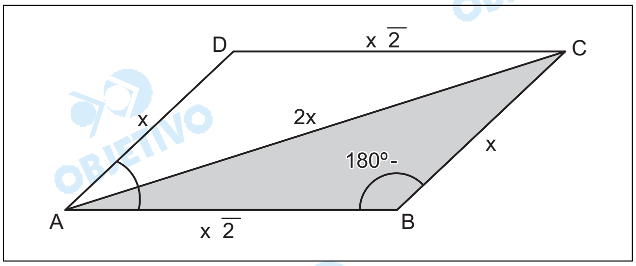
c) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{2}$

e) $\text{tg}\,\theta = \sqrt{7}$

**Resolução**

*A partir do enunciado, temos a figura abaixo:*




*Aplicando-se a lei dos cossenos ao triângulo ABC, resulta:*

$$(2x)^2 = (x\sqrt{2})^2 + x^2 - 2\,.\,(x\,.\,\sqrt{2})\,.\,x\,.\,\cos(180° - \theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 2x^2 + x^2 + 2\,.\sqrt{2}\,.\,x^2\,.\,\cos\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2\sqrt{2}\,.\,x^2\,.\,\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

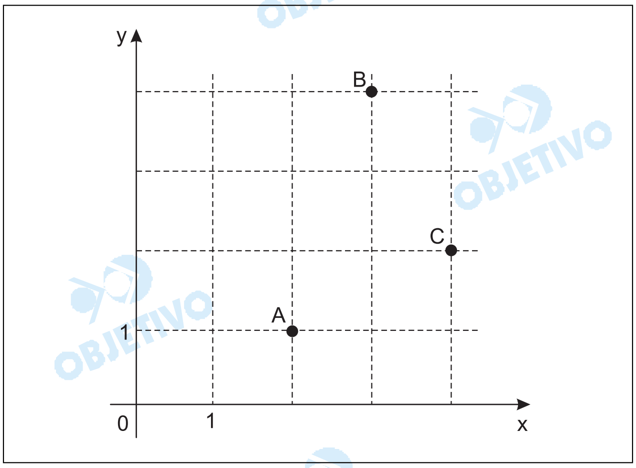
*Sendo θ um ângulo agudo, temos:*

$$\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen\ \theta = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \text{ e } tg\ \theta = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{7}$$

## 46 d

Na figura abaixo os pontos A, B e C estão representados em um sistema de eixos cartesianos ortogonais entre si, de origem O.




É verdade que a equação da

a) circunferência de centro em B e raio 1 é $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$.

b) circunferência de centro em B e raio 1 é $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 15 = 0$.

c) reta horizontal que passa por A é $y = 2$.

d) reta que passa por C e é paralela à bissetriz do 1º quadrante é $x - y - 2 = 0$.

e) reta que passa por C e é paralela à bissetriz do 1º quadrante é $x + y - 2 = 0$.

**Resolução**

*A reta que passa pelo ponto C(4; 2) e é paralela à bissetriz do 1º quadrante (y = x) tem coeficiente angular igual a 1, e sua equação é:*

$y - 2 = 1 \cdot (x - 4) \Leftrightarrow x - y - 2 = 0$

## 47 b

As medidas dos lados de um triângulo retângulo, em centímetros, são numericamente iguais aos termos de uma progressão aritmética de razão 4.

Se a área desse triângulo é de $96cm^2$, o perímetro desse triângulo, em centímetros, é

a) 52 b) 48 c) 42 d) 38 e) 36

**Resolução**

*Se as medidas dos lados de um triângulo retângulo, em centímetros, são numericamente iguais aos termos de uma progressão aritmética de razão 4, podemos representar essas medidas por $x - 4$; $x$; $x + 4$, sendo a hipotenusa igual a $x + 4$.*

*Se a área desse triângulo é $96cm^2$, temos:*

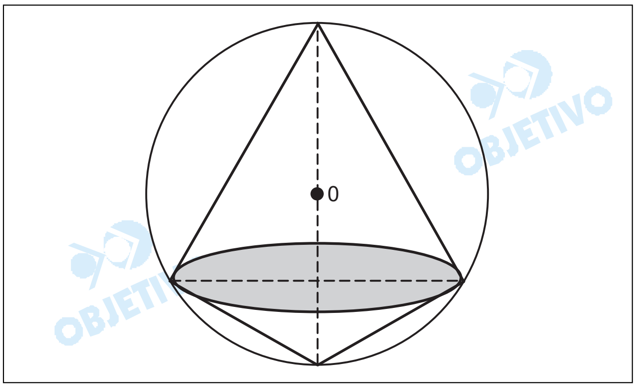
$$\frac{x\ .\ (x-4)}{2} = 96 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 192 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 16 \ \ (\text{pois } x > 0)$$

*Dessa forma, os lados do triângulo serão iguais a 12; 16 e 20 e o perímetro, em centímetros, será igual a 48.*

## 48 c

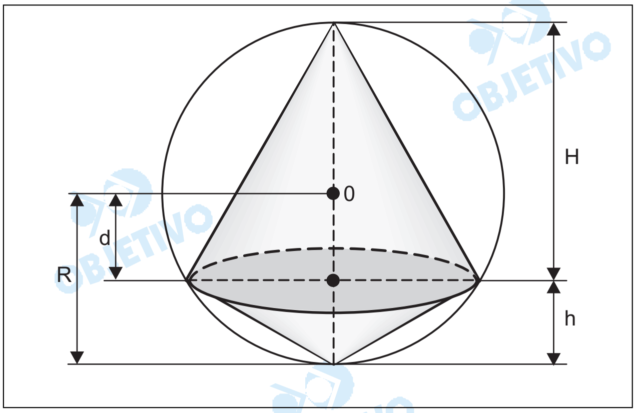
A intersecção de um plano $\alpha$ com uma esfera de raio R é a base comum de dois cones circulares retos, como mostra a região sombreada da figura abaixo.




Se o volume de um dos cones é o dobro do volume do outro, a distância do plano $\alpha$ ao centro O é igual a

a) $\dfrac{R}{5}$ b) $\dfrac{R}{4}$ c) $\dfrac{R}{3}$ d) $\dfrac{2R}{5}$ e) $\dfrac{2R}{3}$

**Resolução**




*Sejam V e H, respectivamente, o volume e a altura do cone maior, v e h o volume e a altura do cone menor e d a distância do plano $\alpha$ ao centro O.*
*Sendo $A_B$ a área da base, comum aos dois cones, temos:*

$$\text{I) } V = 2v \Leftrightarrow \frac{1}{3}\ .\ A_B\ .\ H = 2\ .\ \frac{1}{3}\ .\ A_B\ .\ h \Leftrightarrow H = 2h$$

$$\text{II) } H + h = 2R \Leftrightarrow 2h + h = 2R \Leftrightarrow h = \frac{2R}{3}$$

$$\text{Assim, } d = R - h \Leftrightarrow d = R - \frac{2R}{3} \Leftrightarrow d = \frac{R}{3}$$

## Comentário de Matemática

*A prova de matemática apresentou questões bem enunciadas, de grau médio de dificuldade, havendo predominância de temas da álgebra. Permitiu uma boa seleção dos candidatos.*