

MATEMÁTICA

77 a

Num bolão, sete amigos ganharam vinte e um milhões, sessenta e três mil e quarenta e dois reais. O prêmio foi dividido em sete partes iguais. Logo, o que cada um recebeu, em reais, foi:

- a) 3.009.006,00 b) 3.009.006,50 c) 3.090.006,00
d) 3.090.006,50 e) 3.900.060,50

Resolução

$$\begin{array}{r} 21\,063\,042 \\ 0 \overline{) 3\,009\,006} \end{array}$$

78 a

Para que fosse feito um levantamento sobre o número de infrações de trânsito, foram escolhidos 50 motoristas. O número de infrações cometidas por esses motoristas, nos últimos cinco anos, produziu a seguinte tabela:

Nº de infrações	Nº de motoristas
de 1 a 3	7
de 4 a 6	10
de 7 a 9	15
de 10 a 12	13
de 13 a 15	5
maior ou igual a 16	0

Pode-se então afirmar que a média do número de infrações, por motorista, nos últimos cinco anos, para este grupo, está entre:

- a) 6,9 e 9,0 b) 7,2 e 9,3 c) 7,5 e 9,6
d) 7,8 e 9,9 e) 8,1 e 10,2

Resolução

a) O mínimo valor da média é

$$\frac{1 \cdot 7 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 15 + 10 \cdot 13 + 13 \cdot 5}{50} = 6,94$$

b) O máximo valor da média é

$$\frac{3 \cdot 7 + 6 \cdot 10 + 9 \cdot 15 + 12 \cdot 13 + 15 \cdot 5}{50} = 8,94$$

c) $6,9 < 6,94$ e $8,94 < 9$

d) O valor da média do número de infrações, por motorista, nos últimos cinco anos, para este grupo, está entre 6,9 e 9.

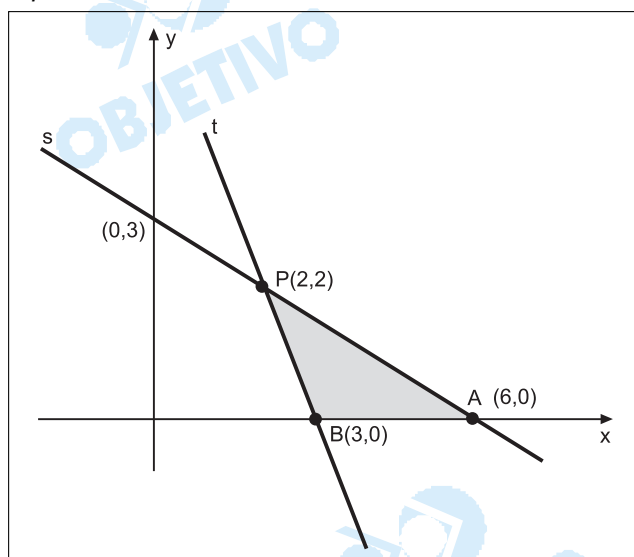
79 b

Duas retas s e t do plano cartesiano se interceptam no ponto (2,2). O produto de seus coeficientes angulares é 1 e a reta s intercepta o eixo dos y no ponto (0,3). A área do triângulo delimitado pelo eixo dos x e pelas retas s e t é:

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Resolução

A partir do enunciado, temos:



- a) A reta **s**, que passa pelos pontos (2;2) e (0;3), tem equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 6.$$

A reta **s** tem coeficiente angular $m_s = -1/2$ e intercepta o eixo das abscissas no ponto A(6;0).

- b) Sendo $m_t \cdot m_s = 1$ (a partir do enunciado) e $m_s = -1/2$, temos $m_t = -2$.

- c) A reta **t**, que passa pelo ponto P(2;2), com coeficiente angular $m_t = -2$, tem equação

$$y - 2 = -2 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow 2x + y = 6$$

e intercepta o eixo das abscissas no ponto B(3;0).

- d) O triângulo formado pelas retas **t**, **s** e eixo das abscissas tem área igual a

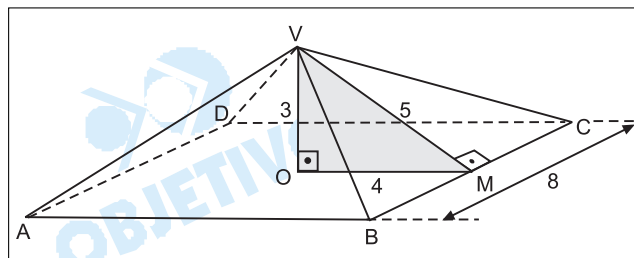
$$A = \frac{AB \cdot y_P}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

80 a

Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8 m e a altura da pirâmide 3 m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1m^2 . Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

- a) 90 b) 100 c) 110 d) 120 e) 130

Resolução



- a) No triângulo VOM, retângulo em O, tem-se $VO = 3$, $OM = 4$ e $VO^2 + OM^2 = VM^2$. Portanto $VM = 5$.
b) A área S_{BCV} da face BCV é

$$S_{BCV} = \frac{1}{2} BC \cdot VM = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$$

- c) A área S_ℓ da superfície lateral da pirâmide é
 $S_\ell = 4 \cdot S_{BCV} = 4 \cdot 20 = 80 \text{ m}^2$.
d) Como cada lote cobre 1 m^2 e são desperdiçados 10 lotes, o número de lotes necessários é

$$\frac{80 \text{ m}^2}{1 \text{ m}^2} + 10 = 90$$

81 b

O sistema $\begin{cases} x + (c + 1)y = 0 \\ cx + y = -1 \end{cases}$, onde $c \neq 0$, admite uma

solução (x, y) com $x = 1$. Então, o valor de c é:

- a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2

Resolução

O sistema para $c \neq 0$ e $x = 1$ terá uma única solução se

$$\begin{cases} 1 + (c + 1) \cdot y = 0 \\ c + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + (c + 1) \cdot y = 0 \\ y = -c - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + (c + 1) \cdot (-c - 1) = 0 \Leftrightarrow (c + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow c = 0 \text{ ou } c = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = -2, \text{ pois } c \neq 0$$

Note que, para $c = -2$, o sistema em x e y é possível e determinado, e a única solução é o par $(1; 1)$.

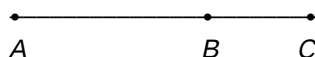
82 b

No segmento $\overline{AC}$, toma-se um ponto B de forma que

$$\frac{AB}{AC} = 2 \frac{BC}{AB}. \text{ Então, o valor de } \frac{BC}{AB} \text{ é:}$$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ c) $\sqrt{5} - 1$
d) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{5} - 1}{3}$

Resolução



De acordo com o enunciado, tem-se:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2 \cdot BC}{AB} \text{ e } AC = AB + BC$$

Assim:

$$\frac{AB}{AB + BC} = \frac{2 \cdot BC}{AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (BC)^2 + 2 \cdot BC \cdot AB - (AB)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + 2 \left(\frac{BC}{AB}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{-2 + \sqrt{12}}{4}, \text{ pois } \frac{BC}{AB} > 0$$

$$\text{Logo: } \frac{BC}{AB} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

83 e

As soluções da equação

$$\frac{x-a}{x+a} + \frac{x+a}{x-a} = \frac{2(a^4+1)}{a^2(x^2-a^2)}, \text{ onde } a \neq 0, \text{ são:}$$

$$\text{a) } \frac{-a}{2} \text{ e } \frac{a}{4} \quad \text{b) } \frac{-a}{4} \text{ e } \frac{a}{4} \quad \text{c) } \frac{-1}{2a} \text{ e } \frac{1}{2a}$$

$$\text{d) } -\frac{1}{a} \text{ e } \frac{1}{2a} \quad \text{e) } -\frac{1}{a} \text{ e } \frac{1}{a}$$

Resolução

$$\frac{x-a}{x+a} + \frac{x+a}{x-a} = \frac{2(a^4+1)}{a^2(x^2-a^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-a)^2 + (x+a)^2}{(x+a)(x-a)} = \frac{2(a^4+1)}{a^2(x^2-a^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2a^2 = \frac{2(a^4+1)}{a^2} \text{ e } |x| \neq |a| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2a^2 = 2a^2 + \frac{2}{a^2}, |x| \neq |a| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{a^2}, |x| \neq |a| \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{a}, |x| \neq |a|$$

Supondo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$, o conjunto-solução é

$$\left\{ -\frac{1}{a}; \frac{1}{a} \right\}.$$

84 c

Seja $f(x) = \log_3(3x+4) - \log_3(2x-1)$. Os valores de x , para os quais f está definida e satisfaz $f(x) > 1$, são:

$$\text{a) } x < \frac{7}{3} \quad \text{b) } \frac{1}{2} < x \quad \text{c) } \frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}$$

$$d) -\frac{4}{3} < x \quad e) -\frac{4}{3} < x < \frac{1}{2}$$

Resolução

$$f(x) = \log_3(3x + 4) - \log_3(2x - 1) \text{ e } f(x) > 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3(3x + 4) - \log_3(2x - 1) > 1 \\ 3x + 4 > 0 \text{ e } 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \frac{3x + 4}{2x - 1} > 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x + 4}{2x - 1} > 3 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 4 > 6x - 3 \text{ e } x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x < 7 \text{ e } x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}.$$

85 e

Uma ONG decidiu preparar sacolas, contendo 4 itens distintos cada, para distribuir entre a população carente. Esses 4 itens devem ser escolhidos entre 8 tipos de produtos de limpeza e 5 tipos de alimentos não perecíveis. Em cada sacola, deve haver pelo menos um item que seja alimento não perecível e pelo menos um item que seja produto de limpeza. Quantos tipos de sacolas distintas podem ser feitos?

- a) 360 b) 420 c) 540 d) 600 e) 640

Resolução

- a) O número total de tipos de sacolas distintas, cada uma com 4 itens, que podem ser feitos com 8 produtos de limpeza e 5 produtos alimentícios é

$$C_{13,4} = \frac{13!}{4!9!} = 715$$

- b) O número total de tipos de sacolas distintas, com 4 itens de limpeza, escolhidos entre os 8 disponíveis é

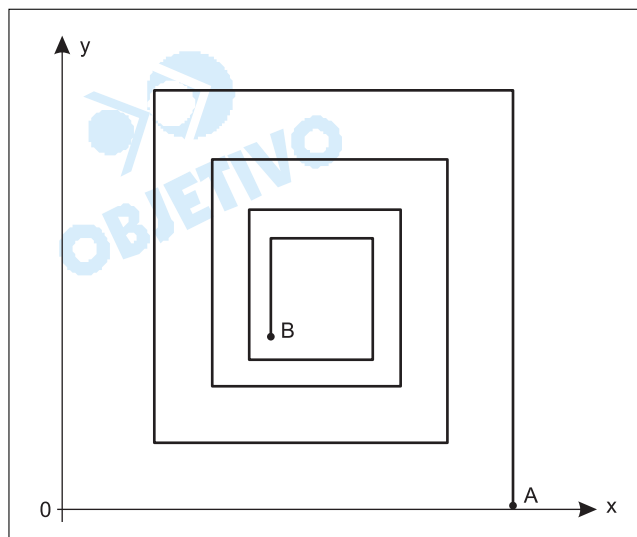
$$C_{8,4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

- c) O número total de tipos de sacolas distintas, com 4 itens de alimentação, escolhidos entre os 5 disponíveis, é $C_{5,4} = 5$.

- d) O número total de tipos de sacolas distintas com pelo menos um item de limpeza e um de alimentação é $715 - 70 - 5 = 640$.

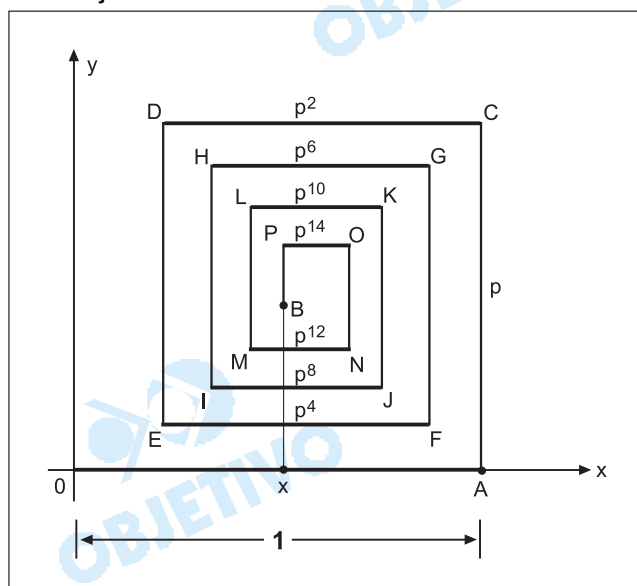
86 d

No plano cartesiano, os comprimentos de segmentos consecutivos da poligonal, que começa na origem O e termina em B (ver figura), formam uma progressão geométrica de razão p , com $0 < p < 1$. Dois segmentos consecutivos são sempre perpendiculares. Então, se $OA = 1$, a abscissa x do ponto $B = (x, y)$ vale:



- a) $\frac{1 - p^{12}}{1 - p^4}$ b) $\frac{1 - p^{12}}{1 + p^2}$ c) $\frac{1 - p^{16}}{1 - p^2}$
d) $\frac{1 - p^{16}}{1 + p^2}$ e) $\frac{1 - p^{20}}{1 - p^4}$

Resolução



As medidas dos segmentos $\overline{OA}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$... formam uma progressão geométrica de primeiro termo $OA = 1$ e razão p .

As medidas dos segmentos $\overline{OA}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, ... formam uma progressão geométrica de razão p^2 .

A abscissa x do ponto B é tal que

$$x = \overline{OA} - \overline{CD} + \overline{EF} - \overline{GH} + \overline{IJ} - \overline{KL} + \overline{MN} - \overline{OP} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 - p^2 + p^4 - p^6 + p^8 - p^{10} + p^{12} - p^{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \cdot [(-p^2)^8 - 1]}{(-p^2) - 1} \Rightarrow x = \frac{1 - p^{16}}{1 + p^2}$$

87 c

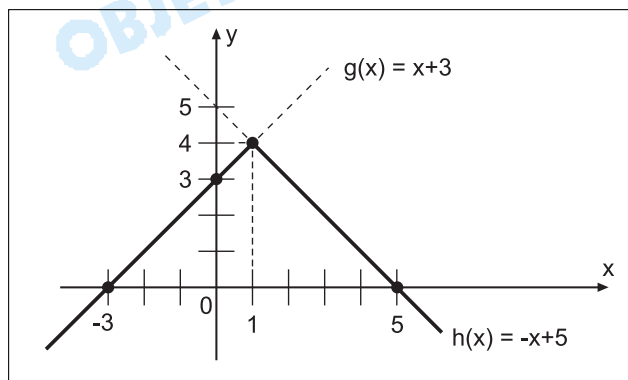
Seja f a função que associa, a cada número real x , o menor dos números $x + 3$ e $-x + 5$. Assim, o valor

máximo de $f(x)$ é:

- a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 7

Resolução

Seja a função definida por $f(x) = \text{mínimo} \{x + 3, -x + 5\}$.
Esboçando-se os gráficos das funções g e h tais que $g(x) = x + 3$ e $h(x) = -x + 5$, tem-se:

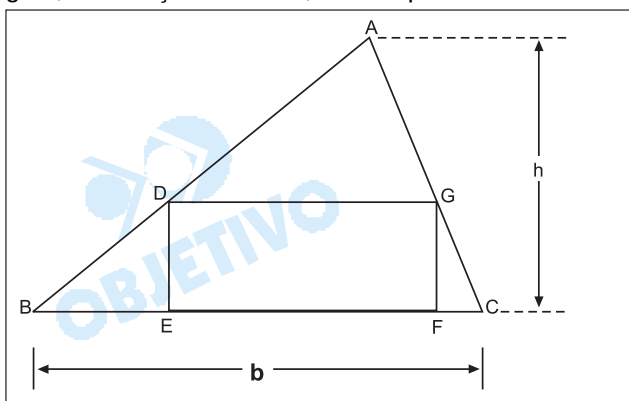


O valor máximo da função f é 4 que se obtém para $x = 1$, pois

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

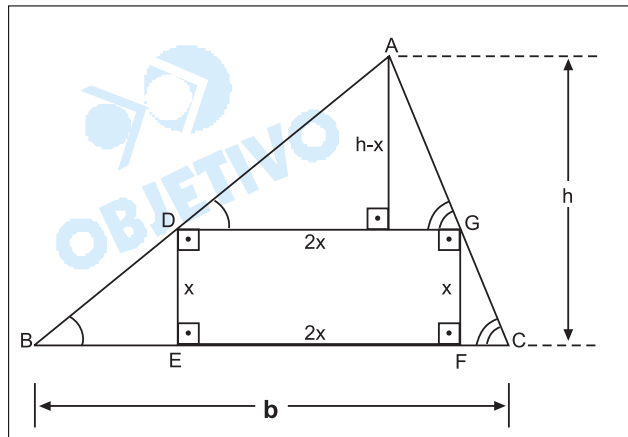
88 d

O triângulo ABC tem altura h e base b (ver figura). Nele, está inscrito o retângulo DEFG, cuja base é o dobro da altura. Nessas condições, a altura do retângulo, em função de h e b , é dada pela fórmula:



- a) $\frac{bh}{h + b}$ b) $\frac{2bh}{h + b}$ c) $\frac{bh}{h + 2b}$
d) $\frac{bh}{2h + b}$ e) $\frac{bh}{2(h + b)}$

Resolução



Os triângulos ABC e ADG são semelhantes pelo critério ($AA\sim$).

Assim, suas bases e suas alturas são, respectivamente, proporcionais.

$$\text{Logo: } \frac{2x}{b} = \frac{h-x}{h} \Leftrightarrow 2hx = bh - bx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2h + b)x = bh \Leftrightarrow x = \frac{bh}{2h + b}$$