

# MATEMÁTICA

1

- a) Quantos múltiplos de 9 há entre 100 e 1000?  
b) Quantos múltiplos de 9 ou 15 há entre 100 e 1000?

## Resolução

a) Os múltiplos inteiros de 9 compreendidos entre 100 e 1000 formam uma progressão aritmética de primeiro termo 108, último termo 999 e razão 9. Sendo  $n$  a quantidade de termos desta progressão, tem-se:  
 $999 = 108 + (n - 1) \cdot 9 \Leftrightarrow n = 100$

b) Entre 100 e 1000, existem:

- 1) 100 múltiplos de 9, conforme item anterior
- 2) 60 múltiplos de 15, pois a progressão aritmética (105; 120; 135; ...; 990) possui 60 termos.
- 3) 20 múltiplos simultaneamente de 9 e 15, pois  $\text{mmc}(9; 15) = 45$  e a progressão aritmética (135; 180; 225; ...; 990) possui 20 termos.

Assim sendo, entre 100 e 1000, existem  $100 + 60 - 20 = 140$  múltiplos inteiros de 9 ou 15.

**Respostas:** a) 100 múltiplos  
b) 140 múltiplos

2

Um caminhão transporta maçãs, pêras e laranjas, num total de 10.000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, pêras e laranjas, tem, respectivamente 50 maçãs, 60 pêras e 100 laranjas e custam, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3300 reais, calcule quantas maçãs, pêras e laranjas estão sendo transportadas.

## Resolução

Seja  $m$ ,  $p$  e  $\ell$ , respectivamente, os números de maçãs, pêras e laranjas transportadas, tem-se:

$$\begin{cases} m + p + \ell = 10\,000 & (\text{quantidade de frutas}) \\ \frac{m}{50} + \frac{p}{60} + \frac{\ell}{100} = 140 & (\text{quantidade de caixas}) \\ 20 \cdot \frac{m}{50} + 40 \cdot \frac{p}{60} + 10 \cdot \frac{\ell}{100} = 3300 & (\text{custo total}) \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} m + p + \ell = 10\,000 \\ 6m + 5p + 3\ell = 42\,000 \\ 12m + 20p + 3\ell = 99\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + p + \ell = 10\,000 \\ 3m + 2p = 12\,000 \\ 9m + 17p = 69\,000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + p + l = 10\,000 \\ 3m + 2p = 12\,000 \\ 11p = 33\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 5\,000 \\ m = 2\,000 \\ p = 3\,000 \end{cases}$$

**Resposta:** Estão sendo transportadas 2000 maçãs, 3000 pêras e 5000 laranjas.

**3**

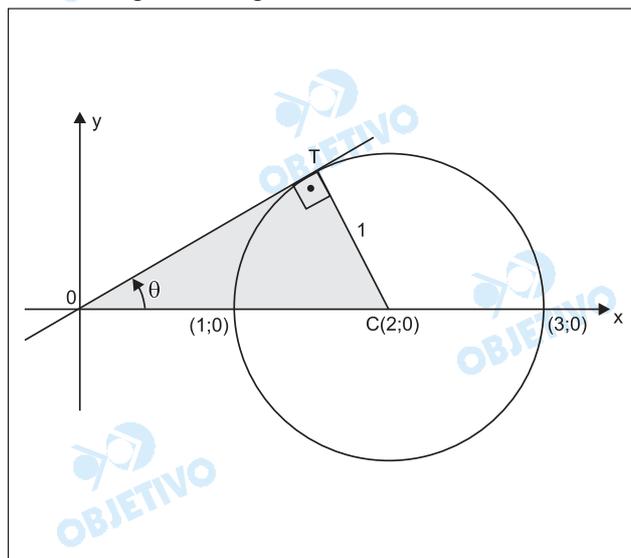
- a) A reta  $r$  passa pela origem do plano cartesiano e tem coeficiente angular  $m > 0$ . A circunferência  $C$  passa pelos pontos  $(1,0)$  e  $(3,0)$  e tem centro no eixo  $x$ . Para qual valor de  $m$  a reta  $r$  é tangente a  $C$ ?
- b) Suponha agora que o valor de  $m$  seja menor que aquele determinado no item anterior. Calcule a área do triângulo determinado pelo centro de  $C$  e pelos pontos de intersecção de  $r$  com  $C$ .

**Resolução**

a) A circunferência tem centro no ponto  $C(2;0)$  e raio  $r = 1$ .

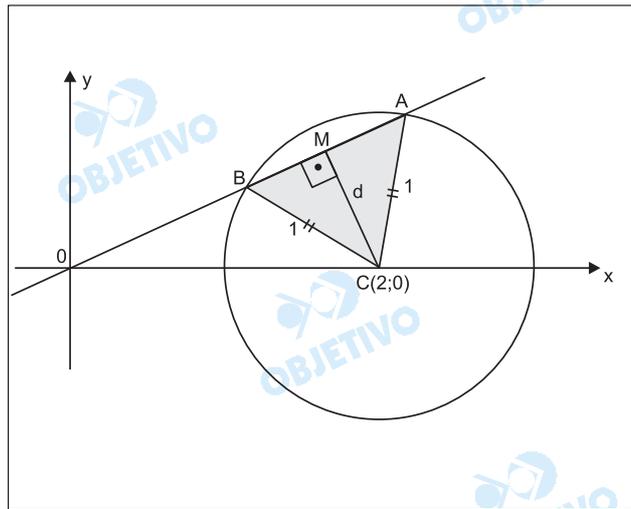
A reta  $r$ , que passa pela origem e tem coeficiente angular  $m > 0$ , tem equação  $y = m \cdot x$ , com  $m = \operatorname{tg} \theta$ .

No triângulo retângulo  $OTC$ , obtém-se  $OT = \sqrt{3}$ .



$$\text{Assim: } m = \operatorname{tg} \theta = \frac{CT}{OT} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- b) Se  $0 < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$ , a reta  $r$  é secante à circunferência. Na obtenção da área do triângulo  $ABC$ , temos:



1º)  $d$  é a distância do centro  $C(2;0)$  à reta  $mx - y = 0$ :

$$d = \frac{|m \cdot 2 - 0|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{2m}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

2º) No triângulo  $AMC$ :

$$AM^2 + \left( \frac{2m}{\sqrt{m^2 + 1}} \right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow AM = \frac{\sqrt{1 - 3m^2}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$3^\circ) AB = 2 \cdot AM = 2 \cdot \frac{\sqrt{1 - 3m^2}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

4º) Área do triângulo  $ABC$ :

$$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot d}{2} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{1 - 3m^2}}{\sqrt{m^2 + 1}} \cdot \frac{2m}{\sqrt{m^2 + 1}}}{2} =$$

$$= \frac{2 \cdot m \cdot \sqrt{1 - 3m^2}}{m^2 + 1}$$

**Respostas:** a)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       b)  $\frac{2 \cdot m \cdot \sqrt{1 - 3m^2}}{m^2 + 1}$

#### 4

Em uma equipe de basquete, a distribuição de idades dos seus jogadores é a seguinte:

idade	Nº de jogadores
22	1
25	3
26	4
29	1
31	2
32	1

Será sorteada, aleatoriamente, uma comissão de dois jogadores que representará a equipe junto aos dirigentes.

- Quantas possibilidades distintas existem para formar esta comissão?
- Qual a probabilidade da média de idade dos dois jogadores da comissão sorteada ser estritamente menor que a média de idade de todos os jogadores?

### Resolução

a) O número de possibilidades distintas de se formar a comissão de dois jogadores escolhidos entre os 12

$$\text{é } C_{12,2} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66.$$

b) 1) A idade média dos jogadores é 27, pois

$$\frac{22 \cdot 1 + 25 \cdot 3 + 26 \cdot 4 + 29 \cdot 1 + 31 \cdot 2 + 32 \cdot 1}{1 + 3 + 4 + 1 + 2 + 1} = 27$$

2) Para que a idade média dos dois jogadores da comissão sorteada seja estritamente menor que a média de idade de todos os jogadores (27), devem-se escolher duplas com idades: (22 e 25) ou (22 e 26) ou (22 e 29) ou (22 e 31) ou (25 e 25) ou (25 e 26) ou (26 e 26) anos.

O número de possibilidades dessa escolha é

$$1 \cdot C_{3,1} + 1 \cdot C_{4,1} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot C_{2,1} + C_{3,2} + C_{3,1} \cdot C_{4,1} + C_{4,2} = \\ = 3 + 4 + 1 + 2 + 3 + 12 + 6 = 31$$

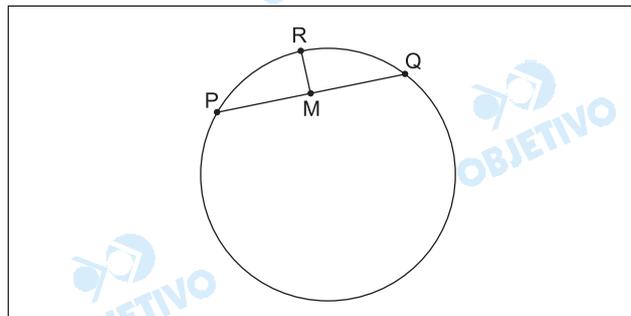
3) A probabilidade de a média de idade dos dois jogadores da comissão sorteada ser estritamente menor que a média de idade de todos os jogadores é

$$\frac{31}{66}$$

**Respostas:** a) 66                      b)  $\frac{31}{66}$

**5**

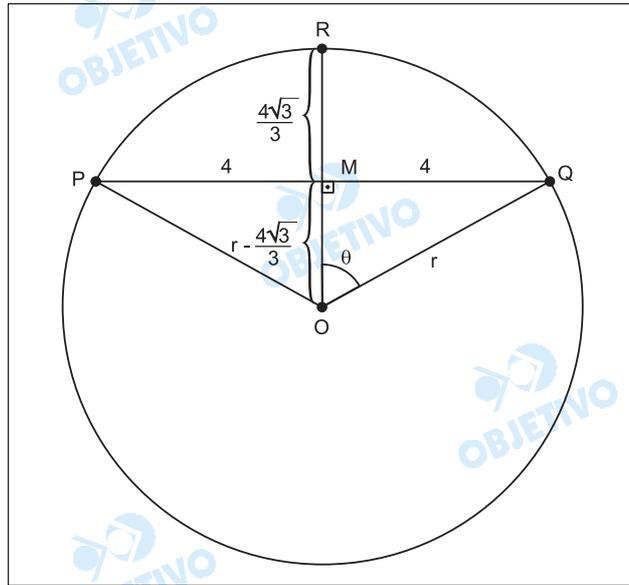
Na figura a seguir, M é o ponto médio da corda  $\overline{PQ}$  da circunferência e  $PQ = 8$ . O segmento  $\overline{RM}$  é perpendicular a  $\overline{PQ}$  e  $RM = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ . Calcule:



a) O raio da circunferência.

- b) A medida do ângulo  $\hat{P}OQ$ , onde O é o centro da circunferência.

**Resolução**



a) No triângulo retângulo  $OMQ$ , tem-se:

1)  $OM = r - \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ,  $MQ = 4$ ,  $OQ = r$  e

$$(OQ)^2 = (OM)^2 + (MQ)^2$$

$$\text{Assim sendo, } r^2 = \left(r - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4^2 \Leftrightarrow r = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

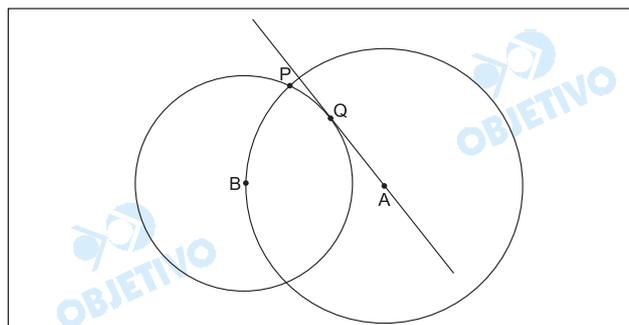
$$2) \operatorname{sen} \theta = \frac{4}{r} = \frac{4}{\frac{8\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

b) A medida do ângulo  $\hat{P}OQ$  é  $2 \cdot \theta = 120^\circ$

**Respostas:** a)  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$       b)  $120^\circ$

**6**

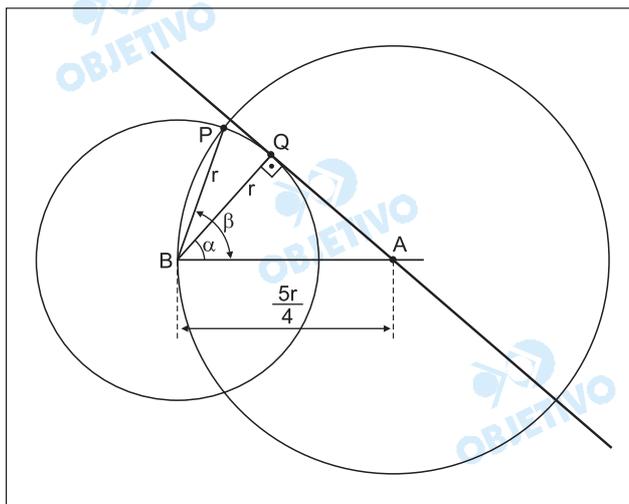
Na figura a seguir, as circunferências têm centros A e B. O raio da maior é  $\frac{5}{4}$  do raio da menor; P é um ponto de intersecção delas e a reta  $\overleftrightarrow{AQ}$  é tangente à circunferência menor no ponto Q.



Calcule:

- a)  $\cos \hat{A}BQ$       b)  $\cos \hat{A}BP$       c)  $\cos \hat{Q}BP$

**Resolução**



Sejam  $BP = BQ = r$ ,  $AB = AP = \frac{5r}{4}$ ,  $\hat{A}BQ = \alpha$  e  $\hat{A}BP = \beta$ .

No triângulo  $ABQ$ , retângulo em  $Q$ , tem-se:

$$\cos \alpha = \frac{BQ}{AB} = \frac{r}{\frac{5r}{4}} = \frac{4}{5} \text{ e}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

No triângulo  $ABP$ , isósceles, tem-se:

$$AP^2 = AB^2 + BP^2 - 2AB \cdot BP \cos \beta \Rightarrow$$

$$\left(\frac{5r}{4}\right)^2 = \left(\frac{5r}{4}\right)^2 + r^2 - 2 \cdot \frac{5r}{4} \cdot r \cdot \cos \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{2}{5} \text{ e } \sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Assim sendo, tem-se:

$$a) \cos \hat{A}BQ = \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$b) \cos \hat{A}BP = \cos \beta = \frac{2}{5}$$

$$c) \cos \hat{Q}BP = \cos(\beta - \alpha) =$$

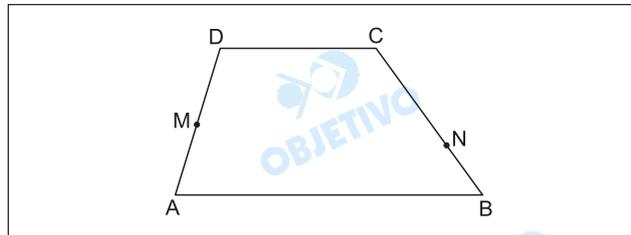
$$= \cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8 + 3\sqrt{21}}{25}$$

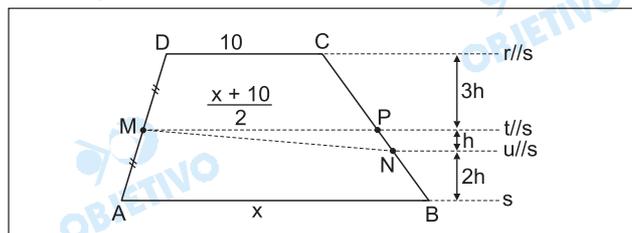
**Respostas:** a)  $\frac{4}{5}$     b)  $\frac{2}{5}$     c)  $\frac{8 + 3\sqrt{21}}{25}$

**7**

No trapézio ABCD, M é o ponto médio do lado  $\overline{AD}$ ; N está sobre o lado  $\overline{BC}$  e  $2BN = NC$ . Sabe-se que as áreas dos quadriláteros ABNM e CDMN são iguais e que  $DC = 10$ . Calcule AB.



**Resolução**



Sejam:

- P o ponto médio de  $\overline{BC}$
- r e s as retas suportes das bases  $\overline{CD}$  e  $\overline{AB}$  do trapézio
- t e u as retas paralelas às bases, conduzidas por P e N, respectivamente
- h a distância entre as retas paralelas t e u
- x a medida do segmento  $\overline{AB}$

A área do quadrilátero ABNM é igual à diferença entre as áreas do trapézio ABPM e do triângulo MPN, e a área do quadrilátero CDMN é igual à soma das áreas do trapézio MPCD e do triângulo MPN, ou seja:

$$S_{ABPM} - S_{MPN} = S_{MPCD} + S_{MPN} \Leftrightarrow S_{ABPM} = S_{MPCD} + 2 \cdot S_{MPN}$$

Assim:

$$\frac{\left(x + \frac{x+10}{2}\right) 3h}{2} = \frac{\left(\frac{x+10}{2} + 10\right) 3h}{2} + 2 \cdot \frac{\frac{x+10}{2} \cdot h}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x + 10)3h = (x + 30)3h + 2(x + 10)h \Leftrightarrow 9x + 30 = 3x + 90 + 2x + 20 \Leftrightarrow 4x = 80 \Leftrightarrow x = 20$$

**Resposta:**  $AB = 20$

**8**

Nos itens abaixo, z denota um número complexo e i a

unidade imaginária ( $i^2 = -1$ ). Suponha  $z \neq i$ .

a) Para quais valores de  $z$  tem-se  $\frac{z+i}{1+iz} = 2$ ?

b) Determine o conjunto de todos os valores de  $z$  para os quais  $\frac{z+i}{1+iz}$  é um número real.

### Resolução

a)  $\frac{z+i}{1+iz} = 2 \Leftrightarrow z+i = 2+2iz \Leftrightarrow z-2iz = 2-i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z(1-2i) = 2-i \Leftrightarrow z = \frac{2-i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4+3i}{5} \Leftrightarrow z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

b) Seja  $z = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\frac{z+i}{1+iz} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x+yi+i}{1+i(x+yi)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+(y+1)i}{1-y+xi} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+(y+1)i}{(1-y)+xi} \cdot \frac{(1-y)-xi}{(1-y)-xi} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(1-y)-x^2i+(y+1)(1-y)i+(y+1) \cdot x}{(1-y)^2+x^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-(x^2+y^2-1)i}{(1-y)^2+x^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=1$ , que é o conjunto de todos os pontos de uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1, que pode ser indicado por  $|z|=1$ .

**Respostas:** a)  $z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

b)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1 \text{ e } z \neq i\}$

## 9

Determine os valores de  $x$  no intervalo  $]0, 2\pi[$  para os quais  $\cos x \geq \sqrt{3} \sin x + \sqrt{3}$ .

### Resolução

$$\cos x \geq \sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

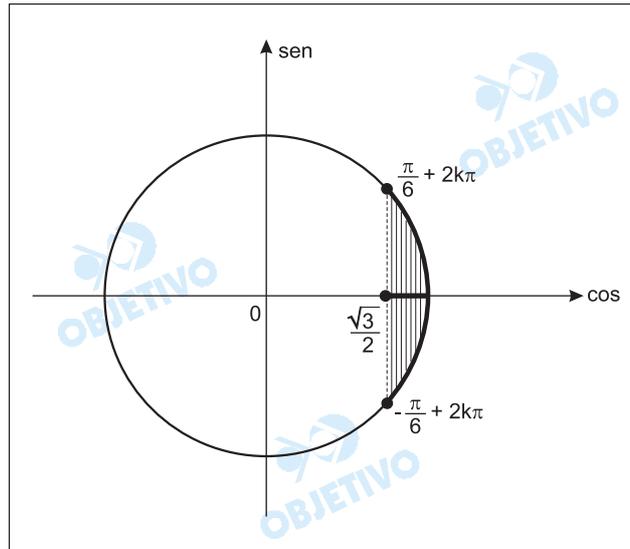
$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen} x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \left( \frac{\pi}{3} + x \right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{3} + x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ pois no ciclo}$$

trigonométrico tem-se

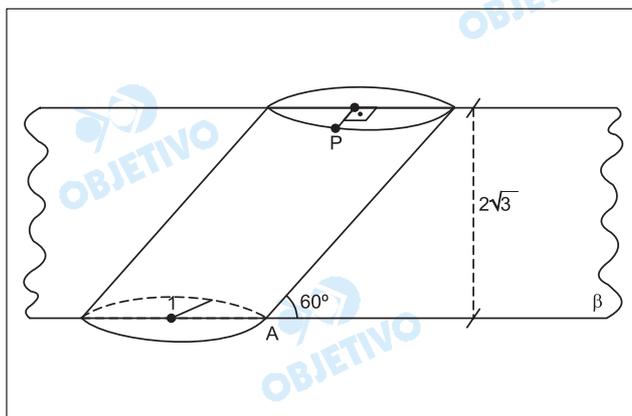


Se  $k = 1$  e  $0 < x < 2\pi$ , tem-se  $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$ .

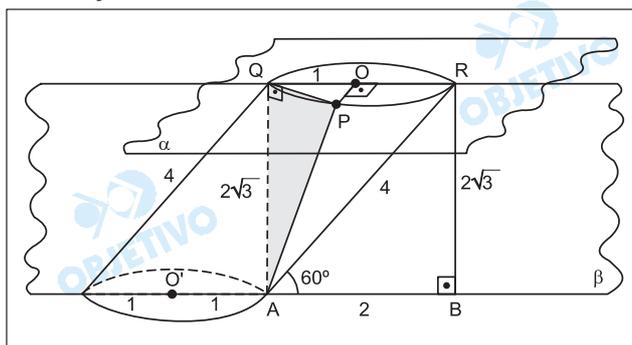
**Resposta:**  $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$ .

**10**

Um cilindro oblíquo tem raio das bases igual a 1, altura  $2\sqrt{3}$  e está inclinado de um ângulo de  $60^\circ$  (ver figura). O plano  $\beta$  é perpendicular às bases do cilindro, passando por seus centros. Se P e A são os pontos representados na figura, calcule PA.



### Resolução



$$\text{sen } 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{AR} \Rightarrow AR = 4$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow AB = 2$$

O triângulo  $OPQ$  é retângulo em  $O$  e o triângulo  $QPA$  é retângulo em  $Q$ , pois  $\vec{AO}$  é perpendicular ao plano  $\alpha$  que contém a base superior do cilindro.

Assim:

$$1^\circ) (QP)^2 = (QO)^2 + (OP)^2 \Leftrightarrow (QP)^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow (QP)^2 = 2$$

$$2^\circ) (PA)^2 = (QA)^2 + (QP)^2$$

Logo  $(PA)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2 \Leftrightarrow (PA)^2 = 14 \Leftrightarrow PA = \sqrt{14}$

**Resposta:**  $PA = \sqrt{14}$

### Comentário

Com quatro questões de álgebra, três de geometria, duas de trigonometria e uma de geometria analítica, todas muito bem enunciadas, sendo algumas delas originais e de bom nível, a banca examinadora organizou uma excelente prova de Matemática, que certamente cumpriu muito bem sua finalidade maior, a de selecionar candidatos às vagas de ciências exatas.

