Matemática

NOTAÇÕES

C: conjunto dos números complexos.
R: conjunto dos números reais.
Z: conjunto dos números inteiros.
N = {0, 1, 2, 3, ...}.
N* = {1, 2, 3, ...}.
$\bar{z}$: conjugado do número $z \in$ C.
i: unidade imaginária; $i^2 = -1$.
arg z: um argumento de $z \in$ C \ {0}.
$[a, b] = \{x \in R;\ a \le x \le b\}$.
$]a, b[= \{x \in R;\ a < x < b\}$.
$\varnothing$: conjunto vazio.
$A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$.
$X^C = U \setminus X$, para $X \subset U$, $U \neq \varnothing$.
I: matriz identidade $n \times n$.
A^{-1}: inversa da matriz inversível A.
A^T: transposta da matriz A.
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B.
$m(\overline{AB})$: medida (comprimento) de $\overline{AB}$.

Questão 1

Seja $z \in$ C. Das seguintes afirmações independentes:

I. Se $\omega = \dfrac{2iz^2 + 5\bar{z} - i}{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}$, então

$$\bar{\omega} = \frac{-2i\bar{z}^2 + 5z + i}{1 + 3z^2 - 2i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + 2|z|}.$$

II. Se $z \neq 0$ e $\omega = \dfrac{2iz + 3i + 3}{(1 + 2i)z}$, então

$$|\omega| \le \frac{2|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,|z|}.$$

III. Se $\omega = \dfrac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3} + 4i}$, então $2\arg z + \dfrac{\pi}{12}$ é um argumento de ω.

é (são) verdadeira(s):

a) todas.
b) apenas I e II.
c) apenas II e III.
d) apenas I e III.
e) apenas II.

alternativa A

I. Verdadeira.

Se $\omega = \dfrac{2iz^2 + 5\bar{z} - i}{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}$, então

$$\bar{\omega} = \frac{\overline{(2iz^2)} + \overline{(5\bar{z})} - \overline{(i)}}{\overline{(1)} + \overline{(3\bar{z}^2)} + \overline{(2iz)} + \overline{(3|z|^2)} + \overline{(2|z|)}} =$$

$$= \frac{-2i\bar{z}^2 + 5z + i}{1 + 3z^2 - 2i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + 2|z|},$$ lembrando que $|z| = |\bar{z}|$.

Nota: temos $1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z| \neq 0$, pois $Re\,(1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|) =$
$= 1 + 3|z|^2 + 2|z| + Re\,(3\bar{z}^2 + 2iz)$ e
$|Re(3\bar{z}^2 + 2iz)| \le |3\bar{z}^2 + 2iz| \le 3|z|^2 + 2|z|$.
Logo $1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z| \ge 1$, para todo $z \in$ C.

II. Verdadeira.

Se $z \neq 0$ e $\omega = \dfrac{2iz + 3i + 3}{(1 + 2i) \cdot z}$, então

$$|\omega| = \frac{|2iz + 3i + 3|}{|(1 + 2i) \cdot z|} \le \frac{|2iz| + |3i + 3|}{|1 + 2i| \cdot |z|} =$$

$$= \frac{2|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,|z|}.$$

III. Verdadeira.

Temos que:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right);$$

$$4\sqrt{3} + 4i = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$$

$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$$

e, portanto, $\dfrac{1+i}{4\sqrt{3} + 4i} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right).$$

Logo $\omega = \dfrac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3} + 4i} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{12}\right) \cdot (|z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta))^2 =$

$= \dfrac{\sqrt{2}|z|^2}{8}\left(\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(2\theta + \dfrac{\pi}{12}\right)\right),$

onde θ *é um argumento de* z.

Questão 2

O valor de $y^2 - xz$ para o qual os números $\text{sen}\,\dfrac{\pi}{12}$, x, y, z e sen 75°, nesta ordem, formam uma progressão aritmética, é:

a) 3^{-4} b) 2^{-6} c) 6^{-2} d) 2^{-5} e) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

alternativa D

Seja r *a razão da PA* $\left(\text{sen}\,\dfrac{\pi}{12}, x, y, z, \text{sen}\,75^o\right)$.

Deste modo, $4r = \text{sen}\,75^o - \text{sen}\,15^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4r = 2 \cdot \text{sen}\,\dfrac{75^o - 15^o}{2} \cdot \cos\dfrac{75^o + 15^o}{2} \Leftrightarrow$

$4r = 2 \cdot \text{sen}\,30^o \cdot \cos 45^o \Leftrightarrow r = \dfrac{\sqrt{2}}{8}.$

Portanto:

$y^2 - xz = y^2 - (y-r)(y+r) = r^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 =$

$= 2^{-5}$

Questão 3

Considere a função

$f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},$

$f(x) = \sqrt{3^{x-2}}\,(9^{2x+1})^{1/(2x)} - (3^{2x+5})^{1/x} + 1.$

A soma de todos os valores de x para os quais a equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ tem raiz dupla é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) 6

alternativa C

A equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ *admite raiz dupla se, e somente se, seu discriminante é nulo, ou seja,* $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{3^{x-2}}\,(9^{2x+1})^{1/(2x)} - (3^{2x+5})^{1/x} + 1 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{x-2}{2}} \cdot 3^{\frac{2(2x+1)}{2x}} = 3^{\frac{2x+5}{x}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{x-2}{2} + \frac{2(2x+1)}{2x}} = 3^{\frac{2x+5}{x}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{2(2x+1)}{2x} = \dfrac{2x+5}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2 - 2x - 8 = 0 \\ x \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 4.$

A soma pedida é $-2 + 4 = 2$.

Questão 4

Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-constante e tal que

$$f(x+y) = f(x)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Das afirmações:

I. $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

II. $f(nx) = [f(x)]^n,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

III. f é par.

é (são) verdadeira(s):

a) apenas I e II. b) apenas II e III.
c) apenas I e III. d) todas.
e) nenhuma.

alternativa A

I. Verdadeira. Inicialmente, vamos mostrar que $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
Supondo, por absurdo, que $f(a) = 0$ *para algum* $a \in \mathbb{R}$*, então, para todo* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f((x-a)+a) = f(x-a) \cdot f(a) = 0$*, ou seja,* f *é constante, o que contraria uma das hipóteses do enunciado.*
Assim, para todo x *real,*

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$$

II. Verdadeira. Provaremos tal afirmação usando o P.I.F.:

- *Para* $n = 1$*, é imediato que* $f(1 \cdot x) = f(x) = [f(x)]^1$.
- *Supondo a afirmação verdadeira para* $k \in \mathbb{N}^*$, $f((k+1) \cdot x) = f(kx + x) = f(kx) \cdot f(x) =$ $= [f(x)]^k \cdot f(x) = [f(x)]^{k+1}$.

Isso completa a demonstração.

III. Falsa. Temos que $f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(0) = 1$*, pois* $f(x) > 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$.
Supondo, por absurdo, que f *é par, ou seja,* $f(x) = f(-x)$*, então* $f(0) = f(x-x) =$
$= f(x) \cdot f(-x) \Leftrightarrow f(x) \cdot f(-x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = 1$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*, o que contraria a hipótese de* f *ser não constante.*

Questão 5

Considere o polinômio $P(x) = 2x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, cujos coeficientes 2, a_2, ..., a_n formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sabendo que $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de P e que $P(2) = 5\,460$, tem-se que o valor de $\frac{n^2 - q^3}{q^4}$ é igual a:

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{7}{4}$ d) $\frac{11}{6}$ e) $\frac{15}{8}$

alternativa C

Sendo $(2, a_2, \ldots, a_n)$ uma PG de razão $q > 0$, temos $a_2 = 2 \cdot q$, $a_3 = 2 \cdot q^2$, ..., $a_n = 2 \cdot q^{n-1}$. Assim, $P(x) = 2x + 2q \cdot x^2 + 2q^2 \cdot x^3 + \ldots + 2q^{n-1} \cdot x^n = 2x \cdot \frac{(qx)^n - 1}{qx - 1}$.

Como $-\frac{1}{2}$ é raiz de P, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\left(q \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^n - 1}{q \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{q}{2}\right)^n - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{q}{2}\right)^n = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} n = 0 \\ \quad \text{ou} \\ q = -2 \\ \quad \text{ou} \\ (q = 2 \text{ e n é par}) \end{array}\right. \Leftrightarrow q = 2 \text{ e n é par.}$$

Temos ainda $P(2) = 5\,460 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \cdot \frac{(2 \cdot 2)^n - 1}{2 \cdot 2 - 1} = 5\,460 \Leftrightarrow 2^{2n} = 4\,096 \Leftrightarrow n = 6$.

Logo $\frac{n^2 - q^3}{q^4} = \frac{36 - 8}{16} = \frac{7}{4}$.

Questão 6

Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $(x - 1)$, obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por $(x + 1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)$, tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

a) –6 b) –4 c) 4 d) 7 e) 9

alternativa E

Pelo teorema do resto, temos:

$$\left|\begin{array}{l} P(1) = 2 \\ P(-1) = 3 \\ P(2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 1^5 + a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + 1 = 2 \\ (-1)^5 + a \cdot (-1)^4 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + 1 = 3 \\ 2^5 + a \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ a + b - c = 3 \\ 16a + 4b + 2c = -33 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} c = -\frac{3}{2} \\ 2a + 2b = 3 \\ 16a + 4b + 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -33 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} c = -\frac{3}{2} \\ 2a + 2b = 3 \\ 8a + 2b = -15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = -3 \\ b = \frac{9}{2} \\ c = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Portanto $\frac{ab}{c} = \frac{-3 \cdot \frac{9}{2}}{-\frac{3}{2}} = 9$.

Questão 7

Das afirmações abaixo sobre a equação $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ e suas soluções no plano complexo:

I. A equação possui pelo menos um par de raízes reais.

II. A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1.

III. Se $n \in N^*$ e r é uma raiz qualquer desta equação, então $\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{r}{3}\right|^k < \frac{1}{2}$.

é (são) verdadeira(s):

a) nenhuma. b) apenas I.
c) apenas II. d) apenas III.
e) apenas I e III.

alternativa D

$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z^5 - 1}{z - 1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} z^5 - 1 = 0 \\ z - 1 \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} z^5 = 1 \\ z \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} z^5 = \cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0 \\ z \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \cos \dfrac{2k\pi}{5} + i \operatorname{sen} \dfrac{2k\pi}{5}$; $k = 1, 2, 3$ ou 4.

I. Falsa. Como $\operatorname{sen} \dfrac{2k\pi}{5} \neq 0$, *para* $k = 1, 2, 3$ *e* 4, *todas as raízes da equação são números complexos não reais.*
II. Falsa. Para todas as raízes z da equação, $|z| = 1$.
III. Verdadeira. Sendo r uma raiz dessa equação, temos que $\left|\dfrac{r}{3}\right| = \dfrac{|r|}{3} = \dfrac{1}{3}$. *Logo* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left|\dfrac{r}{3}\right|^k =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k < \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Questão 8

Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raiz dupla e inteira x_1 e uma raiz x_2, distinta de x_1. Então, $(k + x_1)x_2$ é igual a:

a) –6 b) –3 c) 1 d) 2 e) 8

alternativa B

Sendo $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x + k$, *uma raiz dupla de* $P(x) = 0$ *também é raiz de* $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 14x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ *ou* $x = -\dfrac{1}{3}$. *Como* $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_1 = -2$.
Das relações entre coeficientes e raízes,
$x_1 + x_1 + x_2 = -\dfrac{7}{2} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{-7}{2} - 2(-2) = \dfrac{1}{2}$.
Finalmente, sendo -2 *uma raiz da equação,* $2 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + k = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k = -4$.
Assim, $(k + x_1)x_2 = (-4 + (-2)) \cdot \dfrac{1}{2} = -3$.

Questão 9

Considere o conjunto $S = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b = 18\}$. A soma de todos os números da forma $\dfrac{18!}{a!\,b!}$, $\forall (a, b) \in S$, é:

a) 8^6 b) 9! c) 9^6 d) 12^6 e) 12!

alternativa A

Temos
$S = \{(a, b): a = 18 - b, b \in \mathbb{N}, 0 \leq b \leq 18\}$.
Assim, a soma de todos os números da forma $\dfrac{18!}{a!b!}$, $(a, b) \in S$, *é igual a* $\displaystyle\sum_{b=0}^{18} \frac{18!}{(18-b)!b!} =$

$$= \sum_{b=0}^{18} \binom{18}{b} = 2^{18} = (2^3)^6 = 8^6.$$

Questão 10

O número de divisores de 17 640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

a) 24 b) 36 c) 48 d) 54 e) 72

ver comentário

Como $17\,640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2$, *os divisores de 17 640 que são divisíveis por 3 são da forma* $\pm 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, *onde* $0 \leq a \leq 3$; $1 \leq b \leq 2$; $0 \leq c \leq 1$ *e* $0 \leq d \leq 2$.
Logo a quantidade pedida é $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 96$.
Nota: o número de divisores positivos *de 17 640 que são divisíveis por 3 é* $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$.

Questão 11

Sejam A e P matrizes $n \times n$ inversíveis e $B = P^{-1}AP$. Das afirmações:

I. B^T é inversível e $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.
II. Se A é simétrica, então B também o é.
III. $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$, $\forall \lambda \in R$.

é (são) verdadeira(s):

a) todas. b) apenas I.
c) apenas I e II. d) apenas I e III.
e) apenas II e III.

alternativa D

I. Verdadeira. $\det(B^T) = \det B = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P) =$

$= \det(P^{-1}) \cdot \det A \cdot \det P = \dfrac{1}{\det P} \cdot \det A \cdot \det P =$

$= \det A.$

Logo, como A é inversível, $\det(B^T) \neq 0$ e B^T é inversível.

Por outro lado, $(B^{-1})^T \cdot B^T = (B \cdot B^{-1})^T = I^T = I$. Portanto $(B^{-1})^T$ é a inversa de B^T, ou seja, $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.

II. Falsa. Uma matriz $A_{n \times n}$ é simétrica se, e somente se, $A^T = A$.

Tomando-se a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, simétrica e inversível, e a matriz $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, inversível, temos que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = P^{-1} \cdot A \cdot P =$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Como*

$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \neq B$, *concluímos que B não é simétrica.*

III. Verdadeira. Sendo $\lambda \in R$, $\det(B - \lambda I) =$

$= \det(P^{-1} \cdot A \cdot P - \lambda \cdot P^{-1} \cdot P) =$

$= \det(P^{-1} \cdot (AP - \lambda P)) = \det(P^{-1} \cdot (A - \lambda I) \cdot P) =$

$= \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P =$

$= \dfrac{1}{\det P} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P = \det(A - \lambda I)$

Questão 12

O número de todos os valores de $a \in [0, 2\pi]$, distintos, para os quais o sistema nas incógnitas x, y e z, dado por

$$\begin{cases} -4x + y - 6z = \cos 3a \\ x + 2y - 5z = \operatorname{sen} 2a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{cases},$$

é possível e não-homogêneo, é igual a:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

alternativa A

$$\left|\begin{array}{l} x + 2y - 5z = \operatorname{sen} 2a \\ -4x + y - 6z = \cos 3a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x + 2y - 5z = \operatorname{sen} 2a \\ \quad 9y - 26z = \cos 3a + 4 \operatorname{sen} 2a \\ \; -9y + 26z = -2\cos a - 6\operatorname{sen} 2a \end{array}\right.$$

O sistema é possível se, e somente se,

$\cos 3a + 4 \operatorname{sen} 2a = -(-2\cos a - 6 \operatorname{sen} 2a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 3a - 2 \operatorname{sen} 2a - 2\cos a = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^3 a - 3\operatorname{sen}^2 a \cos a - 4 \operatorname{sen} a \cos a - 2\cos a = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos a(\cos^2 a - 3\operatorname{sen}^2 a - 4\operatorname{sen} a - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos a(-4\operatorname{sen}^2 a - 4\operatorname{sen} a - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos a(2\operatorname{sen} a + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos a = 0$ ou $\operatorname{sen} a = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{\pi}{2}$ ou $a = \dfrac{3\pi}{2}$ ou $a = \dfrac{7\pi}{6}$ ou $a = \dfrac{11\pi}{6}$.

Além disso, o sistema é homogêneo se, e somente se,

$$\left|\begin{array}{l} \cos 3a = 0 \\ \operatorname{sen} 2a = 0 \\ -2\cos a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} \text{ ou } a = \frac{3\pi}{2}.$$

Logo o sistema é possível e não homogêneo se, e somente se, $a = \dfrac{7\pi}{6}$ ou $a = \dfrac{11\pi}{6}$, um total de 2 valores.

Questão 13

Para todo $x \in R$, a expressão $[\cos(2x)]^2[\operatorname{sen}(2x)]^2 \operatorname{sen} x$ é igual a:

a) 2^{-4} [sen $(2x)$ + sen $(5x)$ + sen $(7x)$].

b) 2^{-4} [2 sen x + sen $(7x)$ – sen $(9x)$].

c) 2^{-4} [–sen $(2x)$ – sen $(3x)$ + sen $(7x)$].

d) 2^{-4} [–sen x + 2 sen $(5x)$ – sen $(9x)$].

e) 2^{-4} [sen x + 2 sen $(3x)$ + sen $(5x)$].

alternativa B

Para todo $x \in R$,

$[\cos(2x)]^2 \cdot [\operatorname{sen}(2x)]^2 \cdot \operatorname{sen} x =$

$= [\cos(2x) \cdot \operatorname{sen}(2x)]^2 \cdot \operatorname{sen} x =$

$= \left[\dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{2}\right]^2 \cdot \operatorname{sen} x =$

$= \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{4} \cdot \operatorname{sen}(4x) \cdot \operatorname{sen} x =$

$= \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{4} \cdot \left[\dfrac{\cos(3x) - \cos(5x)}{2}\right] =$

$= 2^{-3}[\operatorname{sen}(4x) \cdot \cos(3x) - \operatorname{sen}(4x) \cdot \cos(5x)] =$

$= 2^{-3}\left[\dfrac{\operatorname{sen}(7x) + \operatorname{sen} x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}(9x) - \operatorname{sen} x}{2}\right] =$

$= 2^{-4}[2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(7x) - \operatorname{sen}(9x)]$.

Tomando $x = \frac{\pi}{4}$, *verificamos que as demais alternativas são falsas.*

Questão 14

Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi]$, respectivamente. Com respeito à função

$$f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$f(x) = \arcsen x + \arccos x,$$

temos que:

a) f é não-crescente e ímpar.
b) f não é par nem ímpar.
c) f é sobrejetora.
d) f é injetora.
e) f é constante.

alternativa E

Dada a função $f : [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ *tal que* $f(x) = \arcsen x + \arccos x$, *fazendo-se* $x = \operatorname{sen} t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, *temos* $f(x) = \arcsen \operatorname{sen} t +$ $+ \arccos \operatorname{sen} t = t + \left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{\pi}{2}$.

Assim, f *é uma função constante e, portanto, não é injetora nem sobrejetora em* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Além disso, $\forall x \in [-1; 1]$, $f(-x) = f(x) = \frac{\pi}{2}$, *de onde temos que* f *é par. Como* $f(-x) \neq -f(x)$, $\forall x \in [-1; 1]$, f *não é ímpar.*

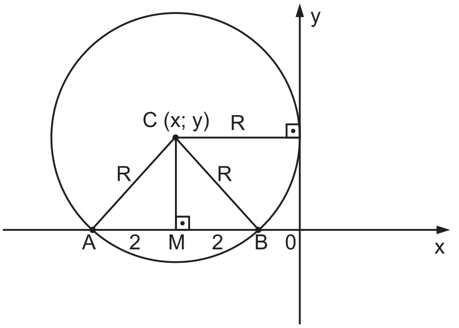
Questão 15

Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangentes ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si de 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:

a) de uma elipse.
b) de uma parábola.
c) de uma hipérbole.
d) de duas retas concorrentes.
e) da reta $y = -x$.

alternativa C

Seja $C = (x; y)$ *o centro de uma das circunferências da família.*



Como a circunferência tangencia o eixo y, $R = |x|$. *Além disso, no triângulo CMB, temos* $CM^2 + 2^2 =$ $= R^2 \Leftrightarrow y^2 + 2^2 = |x|^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$.

Assim, visto que C está no segundo quadrante, o lugar geométrico dos centros das circunferências da família são os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 4$ *situados no segundo quadrante.*

Questão 16

A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}$,

é igual a:

a) $\sqrt{6}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 3 e) $\frac{10}{3}$

alternativa B

$3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x^2 + (5y - 9)x + (2y^2 - 8y + 6) = 0$. *Considerando tal igualdade como uma equação na variável* x, $\Delta = (5y - 9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2y^2 - 8y + 6) =$ $= (y + 3)^2$ *e* $3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 =$

$$= 3\left(x - \frac{-(5y - 9) + (y + 3)}{2 \cdot 3}\right) \cdot$$

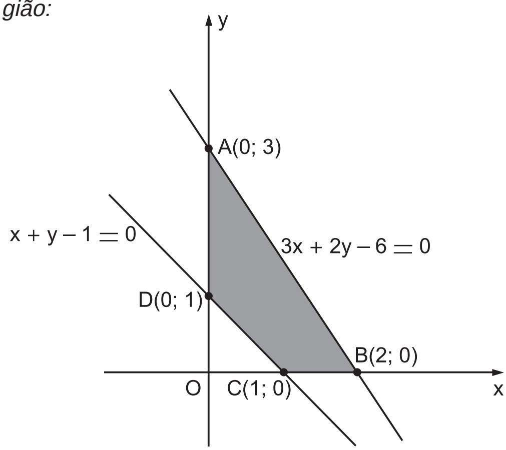
$$\cdot \left(x - \frac{-(5y - 9) - (y + 3)}{2 \cdot 3}\right) =$$

$= (3x + 2y - 6) \cdot (x + y - 1)$.

Logo $3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3x + 2y - 6)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3x + 2y - 6 = 0 \\ \quad \text{ou} \\ x + y - 1 = 0 \end{array} \right.$ e podemos esboçar a região:



Supondo, então, que ABCD é o polígono, sua área é igual à diferença entre as áreas dos triângulos ABO e CDO, ou seja, $\dfrac{2 \cdot 3}{2} - \dfrac{1 \cdot 1}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Questão 17

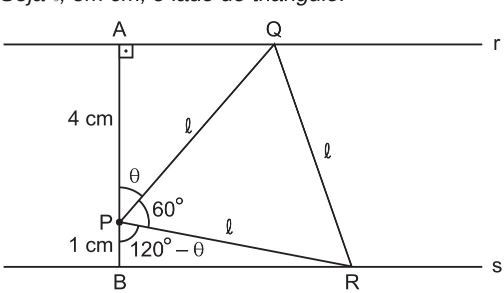
Sejam r e s duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja P um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de r. A área do triângulo equilátero PQR, cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, é igual, em cm^2, a:

a) $3\sqrt{15}$ b) $7\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{6}$

d) $\dfrac{15}{2}\sqrt{3}$ e) $\dfrac{7}{2}\sqrt{15}$

alternativa B

Seja ℓ, em cm, o lado do triângulo.



No triângulo APQ, temos $\cos\theta = \dfrac{4}{\ell}$, *e no triângulo BPR, temos* $\cos(120^o - \theta) = \dfrac{1}{\ell}$. *Logo*

$\cos\theta = 4\cos(120^o - \theta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\theta = 4(\cos 120^o \cos\theta + \operatorname{sen} 120^o \operatorname{sen}\theta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\theta = 4\left(-\dfrac{1}{2}\cos\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cos\theta = 2\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto $AQ = AP \cdot \operatorname{tg}\theta = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ *cm e, assim,* $\ell^2 = 4^2 + (2\sqrt{3})^2 = 28\ cm^2$.

Conseqüentemente, a área do triângulo PQR é $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{28\sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}\ cm^2$.

Questão 18

Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3 780°. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:

a) 63 b) 69 c) 90 d) 97 e) 106

alternativa D

Sejam $n - r$, n e $n + r$, com n, r naturais, $n - r \geq 3$, os números de lados dos polígonos, respectivamente. Temos:

$\left| \begin{array}{l} (n - r)n(n + r) = 585 \\ (n - r - 2)180^o + (n - 2)180^o + \\ + (n + r - 2)180^o = 3\,780^o \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (n - r)n(n + r) = 585 \\ 3n - 6 = 21 \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (9 - r)9(9 + r) = 585 \\ n = 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 81 - r^2 = 65 \\ n = 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} r = 4 \\ n = 9 \end{array} \right.$

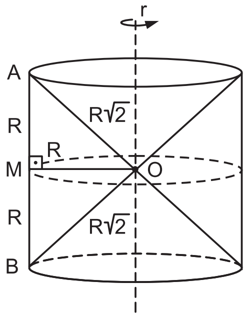
Assim, os três polígonos têm 5, 9 e 13 lados e o número total de diagonais é $\frac{5(5-3)}{2} + \frac{9(9-3)}{2} + \frac{13(13-3)}{2} = 5 + 27 + 65 = 97.$

Questão 19

Considere o triângulo isósceles OAB, com lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de comprimento $\sqrt{2}\,R$ e lado $\overline{AB}$ de comprimento $2R$. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado $\overline{AB}$, é igual a:

a) $\frac{\pi}{2}R^3$ b) πR^3 c) $\frac{4\pi}{3}R^3$
d) $\sqrt{2}\pi R^3$ e) $\sqrt{3}\pi R^3$

alternativa C



Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$*. Temos* $OM^2 = OA^2 - AM^2 = (R\sqrt{2})^2 - R^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow OM = R$*. Assim, ao rotacionarmos o triângulo OAB em torno da reta r paralela a AB e que passa por O, obtemos um sólido cujo volume é igual ao de um cilindro de raio OM = R e altura AB = 2R menos a soma dos volumes de dois cones com raio da base OM = R e altura AM = R. Portanto o volume procurado é igual a*

$$\pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{4\pi}{3}R^3.$$

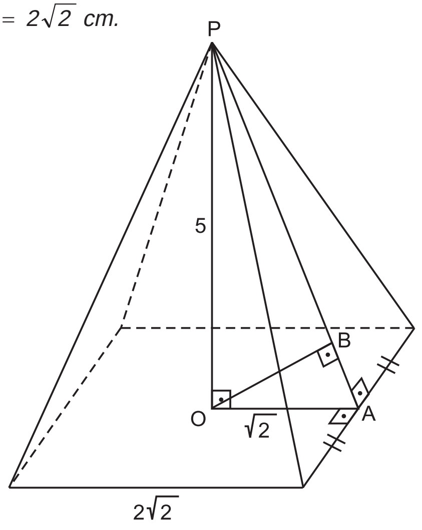
Questão 20

Considere uma pirâmide regular de altura igual a 5 cm e cuja base é formada por um quadrado de área igual a 8 cm^2. A distância de cada face desta pirâmide ao centro de sua base, em cm, é igual a:

a) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ b) $\frac{5\sqrt{6}}{9}$ c) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ d) $\frac{7}{5}$ e) $\sqrt{3}$

alternativa B

A aresta da base da pirâmide tem medida igual a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ *cm.*



O apótema da base, $\overline{OA}$*, tem medida* $\frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ *cm e o apótema da pirâmide,* $\overline{PA}$*, tem medida* $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 5^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ *cm. A distância OB de uma face lateral ao centro O de sua base corresponde à altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo POA e é tal que* $PA \cdot OB = OA \cdot OP \Leftrightarrow 3\sqrt{3} \cdot OB = \sqrt{2} \cdot 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow OB = \frac{5\sqrt{6}}{9}$ *cm.*

AS QUESTÕES DE 21 A 30 DEVERÃO SER RESOLVIDAS NO CADERNO DE RESPOSTAS ANEXO.

Questão 21

Sejam U um conjunto não-vazio e $A \subset U$, $B \subset U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, intersecção e complementar, prove que:

I. Se $A \cap B = \varnothing$, então $B \subset A^C$.

II. $B \backslash A^C = B \cap A$.

Resposta

I) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow (\nexists\, x \in U : x \in A \text{ e } x \in B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall x \in U, x \in B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall x \in U, x \in B \Rightarrow x \in A^C) \Leftrightarrow B \subset A^C$

II) $B \backslash A^C = \{x \in U : x \in B \text{ e } x \notin A^C\} =$
$= \{x \in U : x \in B \text{ e } x \in A\} = B \cap A$

Questão 22

Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número

$$w = \frac{z + \bar{z} + 2}{\sqrt{|z-1| + |z+1| - 3}}$$

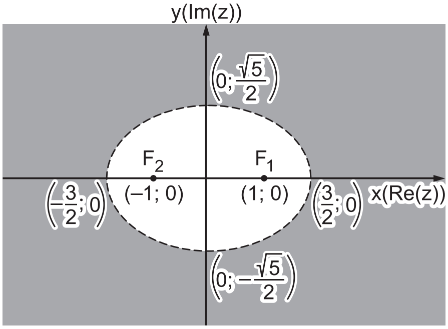
pertence ao conjunto dos números reais. Interprete (ou identifique) este conjunto geometricamente e faça um esboço do mesmo.

Resposta

Seja $z = x + yi$; $x, y \in R$. Como $z + \bar{z} + 2 = 2x + 2 \in R$, temos $w = \dfrac{z + \bar{z} + 2}{\sqrt{|z-1| + |z+1| - 3}} \in R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-1| + |z+1| > 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} > 3 \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 > 3$, onde $P = (x; y)$, $F_1 = (1; 0)$ e $F_2 = (-1; 0)$, o que define a região externa de uma elipse de centro (0; 0), eixo maior 3, contido no eixo x, e distância focal 2. Sendo b o semi-eixo menor, temos $b^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow b = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Assim, o conjunto dos números complexos $z = (x; y)$ para os quais $w \in R$ satisfaz $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} > \dfrac{1}{4}$, que graficamente pode ser representado por



Questão 23

Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eléia, filósofo grego do século V A.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes v_A e v_T, com $0 < v_T < v_A$. Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante $t = 0$ a uma distância $d_1 > 0$ na frente de Aquiles. Calcule os tempos $t_1, t_2, t_3, \dots$ que Aquiles precisa para percorrer as distâncias $d_1, d_2, d_3, \dots$, respectivamente, sendo que, para todo $n \geq 2$, d_n denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante $\sum_{k=1}^{n-1} t_k$ da corrida.

Verifique que os termos t_k, $k = 1, 2, 3, \dots$, formam uma progressão geométrica infinita, determine sua soma e dê o significado desta soma.

Resposta

O tempo t_k que Aquiles precisa para percorrer a distância d_k é $t_k = \dfrac{d_k}{v_A}$. Nesse intervalo de tempo, a tartaruga obtém uma vantagem de $v_T \cdot t_k$, ou seja, $d_{k+1} = v_T \cdot t_k$.

Logo $t_{k+1} = \dfrac{d_{k+1}}{v_A} = \dfrac{v_T \cdot t_k}{v_A} = \left(\dfrac{v_T}{v_A}\right) \cdot t_k$.

Assim, a seqüência $(t_1, t_2, \dots, t_n, \dots)$ é uma progressão geométrica infinita de razão $\dfrac{v_T}{v_A}$, $0 < \dfrac{v_T}{v_A} < 1$, e primeiro termo $t_1 = \dfrac{d_1}{v_A}$.

Conseqüentemente, $t_k = t_1 \cdot \left(\dfrac{v_T}{v_A}\right)^{k-1} = \dfrac{d_1}{v_A} \cdot \left(\dfrac{v_T}{v_A}\right)^{k-1}$.

A soma dos termos da seqüência é

$\dfrac{\dfrac{d_1}{v_A}}{1 - \dfrac{v_T}{v_A}} = \dfrac{d_1}{v_A - v_T}$ e é igual ao intervalo de tempo necessário para que Aquiles alcance a tartaruga.

Questão 24

Mostre que toda função $f: R \setminus \{0\} \to R$, satisfazendo $f(xy) = f(x) + f(y)$ em todo seu domínio, é par.

Resposta

Para todo $x \in R^*$, temos:

$f(x) - f(-x) = f((-x) \cdot (-1)) - f(x \cdot (-1)) =$

$= [f(-x) + f(-1)] - [f(x) + f(-1)] = f(-x) - f(x)$.

Logo $f(x) = f(-x)$, ou seja, f é par.

Questão 25

Sejam a, b, c e d constantes reais. Sabendo que a divisão de $P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$ por $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$ é exata, e que a divisão de $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx - 3$ por $P_4(x) = x^2 - x + 2$ tem resto igual a -5, determine o valor de $a + b + c + d$.

Resposta

Temos:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +0x^3 & +ax^2 & +0x & +b & x^2+2x+4 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -2x^3 & -4x^2 & & & x^2-2x+a \\ \cline{1-5}
 & -2x^3 & +(a-4)x^2 & +0x & +b & \\
 & 2x^3 & +4x^2 & +8x & & \\ \cline{2-5}
 & & ax^2 & +8x & +b & \\
 & & -ax^2 & -2ax & -4a & \\ \cline{3-5}
 & & & (8-2a)x & +b-4a &
\end{array}$$

Como a divisão é exata,

$$\begin{cases} 8 - 2a = 0 \\ b - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \end{cases}.$$

Temos também:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +cx^2 & +dx & -3 & x^2-x+2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & -2x & & x+c+1 \\ \cline{1-4}
 & (c+1)x^2 & +(d-2)x & -3 & \\
 & -(c+1)x^2 & +(c+1)x & -2c-2 & \\ \cline{2-4}
 & & (c+d-1)x & -2c-5 &
\end{array}$$

Como a divisão tem resto igual a -5,

$$\begin{cases} c + d - 1 = 0 \\ -2c - 5 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Logo $a + b + c + d = 4 + 16 + 0 + 1 = 21$.

Questão 26

Sejam a, b, c e d números reais não-nulos. Exprima o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$$

na forma de um produto de números reais.

Resposta

Temos

$$\begin{vmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abcd} \cdot \begin{vmatrix} abcd & a & a^2 & a^3 \\ abcd & b & b^2 & b^3 \\ abcd & c & c^2 & c^3 \\ abcd & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{abcd}{abcd} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix},$$

que é um determinante de Vandermonde cujo valor é $(b - a) \cdot (c - a) \cdot (d - a) \cdot (c - b) \cdot (d - b) \cdot (d - c)$.

Questão 27

Encontre todos os valores de $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ para os quais a equação na variável real x,

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 + \frac{e^x}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{e^x}{2}\right) = a,$$

admite solução.

Resposta

Como $a \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 + \frac{e^x}{2}\right) +$

$+ \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{e^x}{2}\right) = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 + \frac{e^x}{2}\right) +\right.$

$\left. + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{e^x}{2}\right)\right) = \operatorname{tg} a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2} - 1 + \frac{e^x}{2} + \sqrt{2} - 1 - \frac{e^x}{2}}{1 - \left(\sqrt{2} - 1 + \frac{e^x}{2}\right)\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{e^x}{2}\right)} = tg\ a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 = \left(1 - (\sqrt{2} - 1)^2 + \frac{e^{2x}}{4}\right) tg\ a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 - (-2 + 2\sqrt{2})tg\ a = \frac{e^{2x}}{4} \cdot tg\ a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(2\sqrt{2} - 2)(1 - tg\ a) = e^{2x}\ tg\ a\ (*)$$

Como $4(2\sqrt{2} - 2) > 0$, a equação $(*)$ admite solução se, e somente se, $\begin{cases} tg\ a \neq 0 \\ \dfrac{1 - tg\ a}{tg\ a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

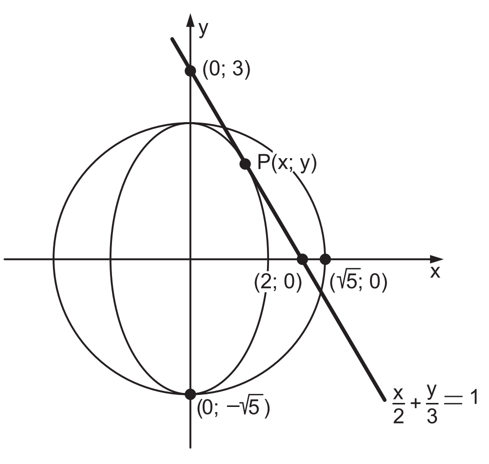
$$\Leftrightarrow 0 < tg\ a < 1 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{\pi}{4}.$$

Questão 28

Sabe-se que uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tangencia internamente a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e que a reta de equação $3x + 2y = 6$ é tangente à elipse no ponto P. Determine as coordenadas de P.

Resposta

Como a reta de equação $3x + 2y = 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ *tangencia a elipse de equação* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *e esta tangencia internamente a circunferência dada por* $x^2 + y^2 = 5$*, a situação descrita pode ser representada por:*



Assim, $b = \sqrt{5}$ *e* $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{5} = 1 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1 \end{cases}$ *tem solução única* $P = (x; y)$.

$$\text{Então } \frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(3 - \frac{3x}{2}\right)^2}{5} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{20}\right)x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{4}{5} = 0 \text{ e, como } \Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{9}{5}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{20}\right)\frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{9}{20} = \frac{81}{80},$$

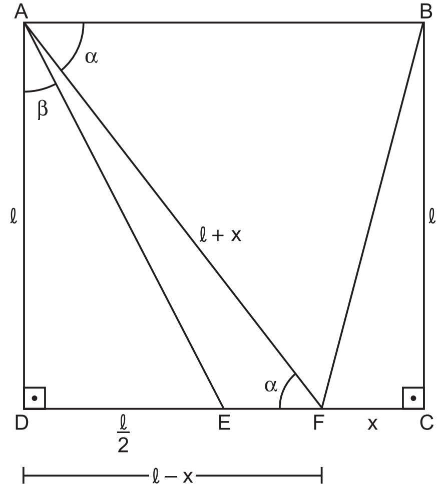
$$x = \frac{-\left(-\frac{9}{5}\right)}{2 \cdot \frac{81}{80}} = \frac{8}{9} \text{ e } y = 3 - \frac{3x}{2} =$$

$$= 3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{5}{3}, \text{ ou seja, } P = \left(\frac{8}{9}; \frac{5}{3}\right).$$

Questão 29

Considere um quadrado $ABCD$. Sejam E o ponto médio do segmento $\overline{CD}$ e F um ponto sobre o segmento $\overline{CE}$ tal que $m\ (\overline{BC}) + m\ (\overline{CF}) = m\ (\overline{AF})$. Prove que $\cos\alpha = \cos 2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = B\hat{A}F$ e $\beta = E\hat{A}D$.

Resposta



Sejam ℓ a medida do lado do quadrado e x a medida de $\overline{CF}$. Então $DE = \frac{\ell}{2}$, $BC + CF = AF \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AF = \ell + x$ e $DF = \ell - x$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao ΔADF, temos $AF^2 = DF^2 + AD^2 \Leftrightarrow (\ell + x)^2 = (\ell - x)^2 + \ell^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ell = 4x$. Como $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD}$, $m(D\hat{F}A) = m(B\hat{A}F) = \alpha$ e assim $\cos\alpha = \frac{DF}{AF} = \frac{\ell - x}{\ell + x} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$.

No ΔADE, $\cos\beta = \frac{AD}{AE} = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + (\ell/2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e

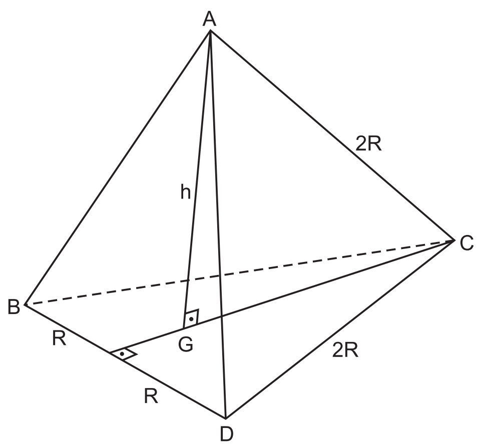
portanto $\cos(2\beta) = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{3}{5}$.

Logo $\cos\alpha = \cos(2\beta)$.

Questão 30

Quatro esferas de mesmo raio $R > 0$ são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento $2R$. Determine, em função de R, a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

Resposta



Seja ABCD o tetraedro cujos vértices são os centros das esferas e seja AG = h a sua altura. Como G é o centro da face BCD, temos $CG = \frac{2}{3} \cdot 2R \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$. Logo, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ACG, temos $h^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2 = (2R)^2 \Leftrightarrow h = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$.

A distância do centro do tetraedro ABCD a cada uma de suas faces é $\frac{h}{4} = \frac{R\sqrt{6}}{6}$.

A distância entre faces paralelas do tetraedro ABCD e do tetraedro que circunscreve as esferas é R. Assim, os centros dos dois tetraedros coincidem e, portanto, a distância do centro a cada face do tetraedro que circunscreve as esferas é $\frac{R\sqrt{6}}{6} + R$.

Como os tetraedros são semelhantes, sendo V o volume desejado temos:

$$\frac{V}{V_{ABCD}} = \left(\frac{\frac{R\sqrt{6}}{6} + R}{\frac{R\sqrt{6}}{6}}\right)^3 = (1 + \sqrt{6})^3 \quad (*)$$

Visto que o volume do tetraedro ABCD é $\frac{1}{3}h \cdot \frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2R\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{4R^2\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{2R^3\sqrt{2}}{3}$, temos

$$(*) \Leftrightarrow V = (1 + \sqrt{6})^3 \frac{2R^3\sqrt{2}}{3} =$$

$$= \frac{R^3 \cdot 2\sqrt{2}(19 + 9\sqrt{6})}{3}.$$