01. Suponha que o gasto com a manutenção de um terreno, em forma de quadrado, seja diretamente proporcional à medida do seu lado. Se uma pessoa trocar um terreno quadrado de 2.500 m^2 de área por outro, também quadrado, de 3.600 m^2 de área, o percentual de aumento no gasto com a manutenção será de:

A) 10 %
B) 15 %
C) 20 %
D) 25 %
E) 30 %

Questão 01, alternativa C

Assunto: Proporcionalidade,Porcentagem e Geometria Plana (Áreas)
Se g é o gasto com a manutenção e l é a medida do lado do terreno temos g = kl (onde k é uma constante, pois o gasto com a manutenção é diretamente proporcional à medida do lado). Se A é a medida da área, temos A = l^2 e daí, como l > 0, l = $\sqrt{A}$. Assim, como o terreno que a pessoa possuía inicialmente tem área igual a 2.500m^2 ,seu lado mede 50m. Como a área do novo terreno é de 3.600m^2 seu lado mede 60m. Assim o gasto com a manutenção passou de 50k para 60k , o que corresponde a um aumento de 10k, ou seja, 1/5 do gasto inicial. Como $\frac{1}{5}$ = 0,20 , teremos um aumento percentual de 20% no gasto com a manutenção. Observe que o aumento percentual do gasto com a manutenção é o mesmo percentual de aumento do lado, o que sempre ocorre com relação ao aumento percentual de grandezas diretamente proporcionais. O candidato mais experiente resolveria o problema considerando simplesmente o aumento percentual do lado.

02. A soma dos 15 primeiros termos de uma Progressão Aritmética é 150. O 8º termo desta P.A. é:

A) 10
B) 15
C) 20
D) 25
E) 30

Questão 02, alternativa A

Assunto:Seqüências (Progressões Aritméticas)

Considerando os 15 primeiros termos da PA, o termo médio é o de ordem $\frac{15+1}{2}=8$. Escrevendo todos os demais termos em função do 8º termo temos: $a_1 = a_8 - 7r$, $a_2 = a_8 - 6r$, $a_3 = a_8 - 5r$, ... , $a_7 = a_8 - r$, $a_9 = a_8 + r$, ... , $a_{13} = a_8 + 5r$, $a_{14} = a_8 + 6r$, $a_{15} = a_8 + 7r$, onde r é a razão da PA.

Portanto $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_7 + a_8 + a_9 + ... + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 15\, a_8 = 150$. Daí $a_8 = \frac{150}{15}=10$.

O argumento aqui utilizado pode ser generalizado para mostrar que numa PA com um número ímpar de termos o termo médio pode ser obtido dividindo a soma dos termos pelo número de termos. O aluno poderia também resolver este problema de modo direto, já usando o resultado geral.

03. A média aritmética das notas dos alunos de uma turma formada por 25 meninas e 5 meninos é igual a 7. Se a média aritmética das notas dos meninos é igual a 6, a média aritmética das notas das meninas é igual a:

A) 6,5
B) 7,2
C) 7,4
D) 7,8
E) 8,0

Questão 03, alternativa B

Assunto:Números Reais (Média Aritmética)
Como a média aritmética dos meninos é 6 e o número de meninos é 5, a soma das notas dos meninos é 5.6=30. Como a média da turma é 7 e o número de alunos da turma é 30 (25 meninas e 5 meninos), a soma das notas da turma é 30.7 = 210. Portanto, a soma das notas das meninas é 210 – 30 = 180. Conseqüentemente, a média das notas das meninas é 180/25 = 7,2. Este problema exige apenas um pouco da habilidade do candidato ao lidar com o conceito de média aritmética.

04. Sejam α e β os ângulos agudos de um triângulo retângulo. Se sen α = sen β e se a medida da hipotenusa é 4 cm, a área desse triângulo (em cm^2) é:

A) 2
B) 4
C) 8
D) 12
E) 16

Questão 04, alternativa B

Assunto:Trigonometria e Geometria Plana(Áreas)
O conhecimento de trigonometria exigido nesta questão é bastante básico. Trata-se simplesmente da definição de seno de um ângulo. Na parte de geometria, além do Teorema de Pitágoras, utilizamos a noção de área e o conhecimento de propriedades relativas aos ângulos internos de um triângulo.
Como sen α = sen β e α e β são complementares, temos $\alpha = \beta = 45^o$ e portanto o triângulo retângulo é isósceles. Se x é a medida de cada um dos lados iguais(catetos), então, pelo teorema de Pitágoras, temos $x^2 + x^2 = 4^2$ e daí $x^2 = 8$. Como o triângulo é retângulo podemos considerar seus catetos como base e altura. Assim sendo, a base e a altura do triângulo são iguais a x e então sua área é $\frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{x^2}{2} = 4$.

05. Sejam M e N conjuntos que possuem um único elemento em comum. Se o número de subconjuntos de M é igual ao dobro do número de subconjuntos de N, o número de elementos do conjunto $M \cup N$ é:

A) o triplo do número de elementos de M.
B) o triplo do número de elementos de N.
C) o quádruplo do número de elementos de M.
D) o dobro do número de elementos de M.
E) o dobro do número de elementos de N.

Questão 05, alternativa E

Assunto:Conjuntos
Para resolver este problema, o candidato deverá conhecer os resultados que envolvem a cardinalidade de conjuntos finitos.
Sejam n(M) o número de elementos do conjunto M e n(N) o número de elementos do conjunto N. Então o número de subconjuntos de M é $2^{n(M)}$ e o número de subconjuntos de N é $2^{n(N)}$. Como o número de subconjuntos de M é igual ao dobro do número de subconjuntos de N, temos $2^{n(M)} = 2.2^{n(N)} = 2^{1 + n(N)}$ e daí n(M) = 1 + n(N)
Como $n(M \cup N) = n(M) + n(N) – n(M \cap N)$ e $n(M \cap N) = 1$, temos $n(M \cup N) = 1 + n(N) + n(N) – 1 = 2n(N)$

06. Sejam $\log_a m = p$ e $\log_a n = q$. Se $p + q = \log_a x$ e $p – q = \log_a y$, o valor de m^2 é:

A) xy
B) x^2
C) y^2
D) x – y
E) x/y

Questão 06, alternativa A

Assunto: Logaritmos (propriedades das funções logarítmicas)
Neste problema cobramos do aluno um conhecimento dos fundamentos da teoria dos logaritmos, destacando a utilização de suas propriedades básicas.
Como $\log_a m = p$ e $\log_a n = q$ temos $p + q = \log_a m + \log_a n = \log_a mn$ e $p – q = \log_a m - \log_a n = \log_a m/n$. Como $p + q = \log_a x$ e $p – q = \log_a y$ temos $\log_a mn = \log_a x$ e $\log_a m/n = \log_a y$ o que implica mn = x e m/n = y. Multiplicando ambos os membros das duas últimas igualdades, temos $m^2 = xy$

07. O segmento que une os pontos de interseção da reta 2x + y – 4 = 0 com os eixos coordenados determina um diâmetro de uma circunferência. A equação dessa circunferência é:

A) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$
B) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$
C) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$
D) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$
E) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 20$

Questão 07, alternativa A

Assunto: Geometria Analítica (equações da reta e da circunferência; distância entre dois pontos)
A principal parte do problema é a determinação dos pontos de interseção da reta 2x + y – 4 = 0 com os eixos coordenados. A partir daí o raio da circunferência procurada é igual à metade da distância entre estes dois pontos, e o centro da circunferência é o ponto médio do segmento determinado por eles.
Para encontrarmos o ponto de interseção da reta 2x + y – 4 = 0 com o eixo x, fazemos y = 0 e para encontrarmos o ponto de interseção da reta 2x + y – 4 = 0 com o eixo y, fazemos x = 0. Assim os pontos de interseção da reta 2x + y – 4 = 0 com os eixos coordenados são (2,0) e (0,4). A distância entre estes pontos é $\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ e portanto o raio da circunferência procurada é $\sqrt{5}$.O ponto médio do segmento que une os pontos (2,0) e (0,4) é $\left(\frac{2+0}{2},\frac{0+4}{2}\right)$= (1,2), que é o centro da circunferência. Portanto a equação da circunferência é $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

08. Sejam f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = \dfrac{17}{2^x+1}$ e $g(x) = 3 + 2x - x^2$. O valor mínimo de f(g(x)) é:

A) 1/4
B) 1/3
C) 1/2
D) 1
E) 2

Questão 08, alternativa D

Assunto:Funções (composição de funções; função quadrática)
Este problema envolve a noção de quociente de dois números positivos, mais particularmente, o fato de que quanto maior for o divisor menor será o quociente.
Temos $f(g(x)) = \dfrac{17}{2^{g(x)}+1}$. Assim quanto maior for o valor de $2^{g(x)} + 1$, menor será o valor de f(g(x)).
Logo f(g(x)) assumirá um valor mínimo quando $2^{g(x)} + 1$ assumir um valor máximo, o que ocorrerá quando g(x) assumir um valor máximo.. Como $g(x) = 3 + 2x - x^2$, trata-se de uma função quadrática e, como o coeficiente de x^2 é negativo, seu gráfico é uma parábola com concavidade para baixo e portanto ela assumirá um valor máximo, o qual ocorrerá quando o valor de x for igual à abscissa do vértice, isto é , quando $x = \dfrac{-2}{2.(-1)}$ = 1. Assim g(1) é o valor máximo assumido pela função g e, portanto, o valor mínimo da composta será $f(g(1)) = \dfrac{17}{2^{g(1)}+1} = \dfrac{17}{2^4+1} = \dfrac{17}{17} = 1$

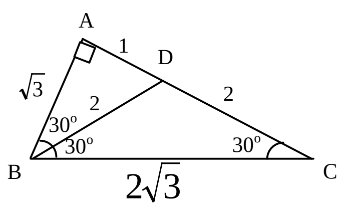
09. Sejam α, β e θ os ângulos internos de um triângulo. Se as medidas desses ângulos são diretamente proporcionais a 1, 2 e 3, respectivamente, e a bissetriz do ângulo β mede duas unidades de comprimento (u.c.), a medida do perímetro deste triângulo é:

A) $3\left(\sqrt{3}+2\right)$ u.c.
B) $(\sqrt{3}+1)$ u.c.
C) $3\sqrt{3}$ u.c.
D) $3\left(\sqrt{3}+1\right)$ u.c.
E) $(3\sqrt{3} - 1)$ u.c.

Questão 09, alternativa D

Assunto: Proporcionalidade,Trigonometria e Geometria Plana (Triângulos)
O que é cobrado de trigonometria neste problema é essencialmente o conhecimento dos valores das funções trigonométricas em arcos especiais. Na geometria plana, o que se exige é o conhecimento de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o e a definição de perímetro.
De fato, como $\alpha + \beta + \theta = 180^o$ e as medidas dos ângulos são proporcionais a 1; 2 e 3, respectivamente, temos $\alpha = \beta/2 = \theta/3 = \frac{\alpha + \beta + \theta}{1+2+3} = \frac{180}{6} = 30$. Portanto as medidas de α,β e θ são, respectivamente, 30^o, 60^o e 90^o ,

Observando a figura abaixo, vemos que o segmento BD é a bissetriz do ângulo β e o triângulo BDC é isósceles e, portanto, a medida do segmento DC é 2 u.c.Temos também: medida de BC igual a 2.2 cos $30^o = 2.\,2.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$; medida de AB igual a 2 cos 30^o = $2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; e medida de AD igual a 2 sen 30^o = $2.\frac{1}{2} = 1$. Daí concluímos que os catetos medem 3 e $\sqrt{3}$ e a hipotenusa mede $2\sqrt{3}$ e, portanto, a medida do perímetro deste triângulo é $3\sqrt{3} + 3 = 3(\sqrt{3}+1)$ u.c.



10. Um cone circular reto e uma pirâmide de base quadrada têm a mesma altura e o mesmo volume. Se r é a medida do raio da base do cone, e b é a medida do lado da base da pirâmide, então o quociente b/r é igual a:

A) 1/3
B) 1
C) $\sqrt{\pi}$
D) π
E) 2π

Questão 10, alternativa C

Assunto:Geometria Espacial (Cones;Pirâmides;Volumes)
Neste problema, o candidato obterá o resultado imediatamente a partir do conhecimento das fórmulas de volume do cone e da pirâmide.
De fato,se v_1 e v_2 são os volumes do cone e da pirâmide, respectivamente, então $v_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ e $v_2 = \frac{1}{3}b^2 h$.

Como $v_1 = v_2$,temos $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}b^2 h$, logo $\frac{b^2}{r^2} = \pi$ e daí $\frac{b}{r} = \sqrt{\pi}$

11. O coeficiente de x^3 no polinômio $p(x) = (x - 1)\cdot(x + 3)^5$ é:

A) 30
B) 50
C) 100
D) 120
E) 180

Questão 11, alternativa E

Assunto:Polinômios (Operações; Grau) e Análise Combinatória(Binômio de Newton)
$(x+3)^5 = x^5 + 5.x^4.3 + 10.x^3.3^2 + 10.x^2.3^3 + 5.x.3^4 + 3^5 = x^5 + 15.x^4 + 90.x^3. + 270.x^2 + 405x. + 243$. Daí o termo de grau 3 em (x-1) $(x+3)^5$ será $270x^3 - 90x^3 = 180x^3$. Portanto, o coeficiente do termo de grau 3 deste polinômio é 180.
Como temos o produto de (x-1) por $(x+3)^5$, o candidato poderia simplesmente obter os coeficientes dos termos de grau 2 e 3 do desenvolvimento de $(x+3)^5$ e subtrair um do outro.

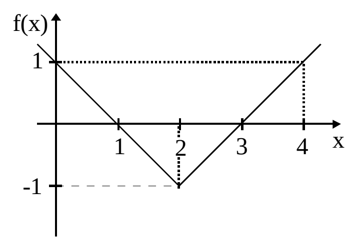
12. Se um comerciante misturar 2kg de café em pó do tipo I com 3kg de café em pó do tipo II, ele obtém um tipo de café cujo preço é R$ 4,80 o quilograma. Mas, se misturar 3kg de café em pó do tipo I com 2kg de café do tipo II, a nova mistura custará R$ 5,20 o quilograma. Os preços do quilograma do café do tipo I e do quilograma do café do tipo II são respectivamente:

A) R$ 5,00 e R$ 3,00
B) R$ 6,40 e R$ 4,30
C) R$ 5,50 e R$ 4,00
D) R$ 5,30 e R$ 4,50
E) R$ 6,00 e R$ 4,00

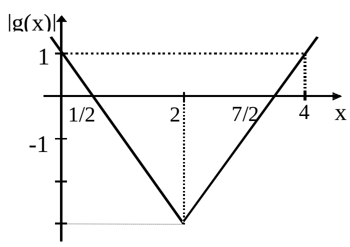
Questão 12, alternativa E

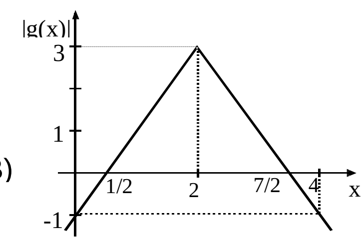
Assunto:Sistemas Lineares (resolução de sistemas lineares)
Este é um tipo de problema bastante comum e semelhante a muitos outros que enfrentamos no nosso cotidiano. Sua solução recai num sistema linear de duas equações e duas incógnitas.
Sejam x o preço do quilograma do café tipo (I) e y o preço do quilograma do café tipo (II). Temos, então:
$2x+3y = 5.(4,80) = 24$
$3x+2y = 5.(5,20) = 26$
Resolvendo o sistema temos $x = 6$ e $y = 4$

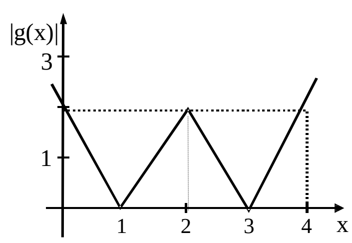
13. Seja f uma função real de variável real cujo gráfico está representado ao lado.

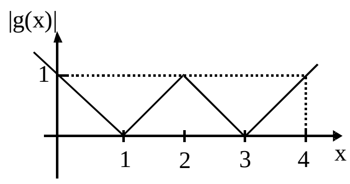


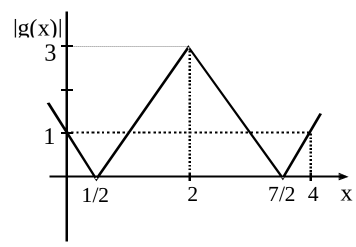
Se $g(x) = 2\ f(x) - 1$, assinale a alternativa cujo gráfico melhor representa $|g(x)|$.

A)


B)


C)


D)


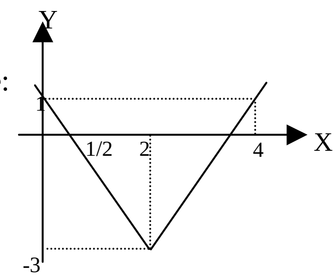
E)


Questão 13, alternativa E

Assunto: Funções (Gráficos) e Números Reais (Módulo)

De acordo com o gráfico de f, vemos que os pontos (0,1), (2,-1) e (4,1) pertencem ao gráfico. A equação da reta que passa por (0,1), (2,-1) é $\frac{y-1}{x-0}=\frac{-1-1}{2-0}$ e, assim, y = -x+1 . A equação da reta que passa por (2,-1), (4,1) é $\frac{y+1}{x-2}=\frac{1-(-1)}{4-2}$ e daí y = x – 3 . Portanto, temos f(x) = $\begin{cases}-x+1, \; se\, x\le 2\\ x-3, \; se\, x>2\end{cases}$ e, assim, g(x) = 2f(x) – 1 = $\begin{cases}2(-x+1)-1, \; se\, x\le 2\\ 2(x-3)-1, \; se\, x>2\end{cases}$ $\Rightarrow$

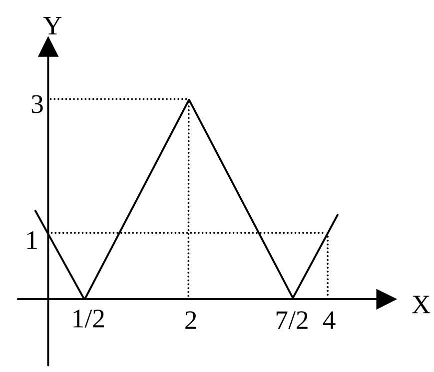
g(x) = 2f(x) – 1 = $\begin{cases}-2x+1, \; se\, x\le 2\\ 2x-7, \; se\, x>2\end{cases}$. Temos g(0) = 1; g(2) = -3; g(4) = 1 e mais: g(x) = 0 $\Leftrightarrow$ - 2x + 1 =0 ou 2x - 7 = 0 $\Leftrightarrow$ x = $\frac{1}{2}$ ou x = $\frac{7}{2}$. Assim, o gráfico de g(x) é o seguinte:



Temos, portanto, que g(x)≥0 se x ≤ 1/2 ou x ≥ 7/2 e g(x)<0 se x∈(1/2, 7/2). Logo | g(x) | = g(x),se x ≤ 1/2 ou x ≥ 7/2 e | g(x) | = - g(x) se x∈(1/2, 7/2). Assim:

$$|g(x)| = \begin{cases}-2x+1, \; se\, x\le \frac{1}{2}\\ 2x-1, \; se\, \frac{1}{2}<x\le 2\\ -2x+7, \; se\, 2<x<\frac{7}{2}\\ 2x-7, \; se\, x\ge \frac{7}{2}\end{cases}$$

e, portanto, o gráfico que melhor representa | g(x) é:



Neste problema, o candidato com um pouco de experiência poderia resolver por exclusão. Como | g(x) | ≥0, os itens A e B estariam automaticamente excluídos. Como | g(2) | =3 os itens C e D também estariam excluídos. Restaria, portanto, o item E.

14. O número de maneiras segundo as quais podemos dispor 3 homens e 3 mulheres em três bancos fixos, de tal forma que em cada banco fique um casal, sem levar em conta a posição do casal no banco, é:

A) 9
B) 18
C) 24
D) 32
E) 36

Questão 14, alternativa E

Assunto:Análise Combinatória

Neste problema, o conhecimento do princípio fundamental da contagem permite uma solução imediata.
O número de possibilidades para o primeiro banco é 3.3 = 9, para o segundo é 2.2 = 4 e para o terceiro é 1.1 = 1. Portanto, o número de maneiras segundo as quais podemos dispor os 3 homens e as 3 mulheres, em três bancos e sem levar em conta a posição do casal no banco, é 9.4.1 = 36.

15. A área do polígono cujos vértices são as representações geométricas das raízes do polinômio $p(x) = x^6 - 1$ é:

A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

E) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Questão 15, alternativa A

Assunto:Números Complexos e Polinômios (Raízes)

As raízes do polinômio $p(x) = x^6 - 1$ são as raízes sextas da unidade. As raízes sextas da unidade são números complexos cujo módulo é igual a 1 e, portanto, suas representações geométricas são pontos equidistantes sobre a circunferência de raio 1 e centro na origem. Como 1 é uma destas raízes, a representação geométrica destas raízes coincide com os vértices do hexágono regular (veja figura abaixo) inscrito na circunferência de raio 1 e centro na origem . A área de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio r é $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$. Como, no nosso caso, r =1, a área deste hexágono é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.