

01. Considere a matriz  $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$  tal que  $a_{ij} = i - j$ . Calcule  $\det(A \cdot A^t)$ .

## Solução

Assunto: matrizes.

Esta questão exige do candidato o conhecimento dos conceitos de produto de matrizes, da transposta de uma matriz e de determinante.

De acordo com a definição, temos:  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  e, portanto,  $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Daí,  $(A \cdot A^t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$  e, então,  $\det(A \cdot A^t) = 5 + 0 + 0 - 1 - 0 - 4 = 0$

02. Se  $a$  e  $b$  são números inteiros primos entre si, e se  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$ , calcule  $(a + b)$ . Sugestão: utilize o fato de que  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , para  $n \neq 0$  e  $n \neq -1$ .

## Solução

Assunto: números reais e Aritmética.

Utilizando-se a sugestão, obtém-se o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} = \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{2} \right] + \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] + \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right] + \left[ \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right] + \left[ \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right] + \left[ \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right] + \left[ \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right] + \left[ \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right] = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Como  $a$  e  $b$  são primos entre si, temos  $a = 9$  e  $b = 10$  e, assim,  $a + b = 19$

03. Um operário gastava mensalmente 10% do seu salário com transporte. Depois de um aumento no preço das passagens, ele passou a gastar R\$ 5,00 a mais, por mês, comprometendo a partir daí 12,5% do seu salário com transporte. Calcule o valor do salário desse operário.

## Solução

Assunto: porcentagem.

Este problema visa medir a habilidade do candidato em utilizar o conceito de porcentagem.

Como o percentual gasto com transporte aumentou de 10% para 12,5%, tivemos um aumento percentual de 2,5%. Portanto, R\$ 5,00 corresponde a 2,5% do salário deste operário. Se  $s$  é o salário do operário, temos 2,5% de  $s$  igual a 5. Daí,  $s = 5 \cdot (100 : 2,5) = 5 \cdot 40 = 200$ .

04. Encontre os números reais  $x$  e  $y$  que satisfazem simultaneamente as igualdades  $\log_2 x + \log_4 y = 2$  e  $\log_4 x + \log_2 y = 1$ .

Solução

Assunto: logaritmo.

Nesta questão, além das propriedades básicas dos logaritmos, o candidato também deverá ter conhecimento dos resultados que envolvem mudança de base.

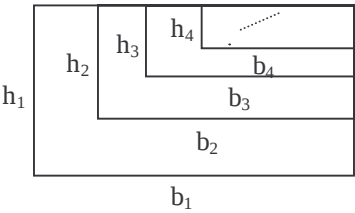
$$\log_2 x + \log_4 y = 2 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 y}{\log_2 4} = 2 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 y}{2} = 2 \Leftrightarrow 2\log_2 x + \log_2 y = 4$$

$$\log_4 x + \log_2 y = 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 y = 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x}{2} + \log_2 y = 1 \Leftrightarrow \log_2 x + 2\log_2 y = 2$$

Temos então  $2\log_2 x + \log_2 y = 4$  e  $\log_2 x + 2\log_2 y = 2$ . Multiplicando a segunda equação por 2 e subtraindo a primeira temos  $3\log_2 y = 0 \therefore \log_2 y = 0 \therefore y = 2^0 = 1$ .

Substituindo  $y$  por 1 em  $\log_2 x + 2\log_2 y = 2$  temos  $\log_2 x = 2$  e daí  $x = 2^2 = 4$

05. Na figura, temos uma sucessão infinita de retângulos semelhantes, cujas medidas dos lados correspondentes, a partir do segundo retângulo, são sempre iguais a 3/4 das medidas dos lados anteriores (isto é,  $h_{n+1} = \frac{3}{4}h_n$  e  $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n$ ). Se o retângulo maior possui as dimensões 70 cm x 50 cm, calcule o valor da soma das áreas de todos os retângulos.



Solução

Assunto: seqüências e geometria plana.

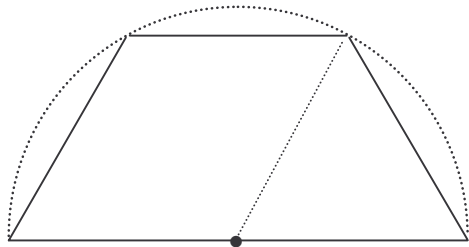
Nesta questão, o aluno deverá aplicar conhecimentos relativos à área de um retângulo e a progressões geométricas com infinitos termos e razão positiva menor que 1.

De acordo com os dados, temos  $h_{n+1} = \frac{3}{4}h_n$  e  $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n$ . Seja  $R_n$  a área do  $n$ -ésimo retângulo. Temos então  $R_{n+1} = h_{n+1} \cdot b_{n+1} = \frac{3}{4}h_n \cdot \frac{3}{4}b_n = \frac{9}{16}h_n \cdot b_n = \frac{9}{16}R_n$  e, portanto, a seqüência  $(R_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{9}{16}$  e a soma  $R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n + \dots$  é igual a

$$\frac{R_1}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{b_1 \cdot h_1}{\frac{7}{16}} = \frac{70 \cdot 50}{\frac{7}{16}} = 10 \cdot 50 \cdot 16 = 8000.$$

O valor da soma das áreas de todos os retângulos é igual a 8.000 cm<sup>2</sup>

06. Um trapézio isósceles está inscrito numa semi-circunferência de raio  $r$ , conforme a figura. Se a medida de sua base menor é igual à medida de seus lados não paralelos, calcule o volume do sólido que se obtém girando de  $360^\circ$  a região limitada por esse trapézio, em torno da reta que contém sua base maior.



Solução

Assunto: geometria espacial.

Esta questão cobra conhecimentos relativos ao volume de um sólido e tem por objetivo principal testar a capacidade do candidato no que diz respeito à visualização geométrica espacial.

Quando giramos esta região, em torno da reta que contém a base, obtemos a seguinte figura:

Este sólido consiste de dois cones e um cilindro. Os cones têm altura  $\frac{r}{2}$  e base circular de raio  $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ , e o cilindro tem a mesma base dos cones e altura  $r$ . Assim, o volume do sólido é

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \left( \frac{\sqrt{3}}{2}r \right)^2 \cdot \frac{r}{2} + \pi \left( \frac{\sqrt{3}}{2}r \right)^2 \cdot r = \frac{1}{3} \pi \frac{3}{4} r^3 + \pi \frac{3}{4} r^3 = \left( \frac{1}{3} + 1 \right) \left( \frac{3}{4} \pi r^3 \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \pi r^3 = \pi r^3$$

07. Encontre as soluções da equação:

$$9 - 2 \cos^2 x = 15 \operatorname{sen} x, \quad \text{no intervalo } \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Solução

Assunto: trigonometria.

Temos aqui uma equação trigonométrica que o candidato resolverá, usando simplesmente a identidade fundamental ( $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ ) e as propriedades elementares de  $\operatorname{sen} x$ .

De fato:

$$9 - 2 \cos^2 x = 15 \operatorname{sen} x$$

$$9 - 2 (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 15 \operatorname{sen} x$$

$$7 + 2 \operatorname{sen}^2 x = 15 \operatorname{sen} x$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 15 \operatorname{sen} x + 7 = 0. \text{ Fazendo } y = \operatorname{sen} x, \text{ temos:}$$

$$2 y^2 - 15 y + 7 = 0$$

$$y = \frac{15 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{15 \pm 13}{4} \therefore y = 7 \text{ ou } y = \frac{1}{2}. \text{ Como } y = \operatorname{sen} x, \text{ temos } y \neq 7 \text{ e, portanto, } y = \frac{1}{2}.$$

Como  $y = \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$  temos  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$  ou  $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ,  $k$  inteiro. No intervalo  $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

temos  $x = \frac{\pi}{6}$ .

08. Duas equipes disputam entre si uma série de jogos em que não pode ocorrer empate e as duas equipes têm as mesmas chances de vitória. A primeira equipe que conseguir duas vitórias seguidas ou três vitórias alternadas vence a série de jogos. Qual a probabilidade de uma equipe vencer a série de jogos com duas vitórias seguidas ?

Solução

Assunto: probabilidade.  
Sejam A e B as equipes envolvidas na disputa. Como as chances de vitória das equipes são iguais, a probabilidade de uma equipe vencer um jogo é  $\frac{1}{2}$ .  
A melhor forma de resolver este problema é construindo a árvore de possibilidades

Observando a árvore concluímos que existem 10 possibilidades de encerramento da série de jogos: AA e BB, encerrando a série com dois jogos; ABB e BAA, encerrando a série com três jogos; ABAA e BABB encerrando a série com quatro jogos; ABABB,BABAA,ABABA e BABAB encerrando a série com cinco jogos. Excetuando as possibilidades ABABA e BABAB as demais encerram a série com uma equipe vencendo com duas vitórias seguidas. Assim, para calcularmos a probabilidade de a série terminar com uma equipe vencendo dois jogos seguidos, devemos somar as probabilidades das demais possibilidades.

Temos  $P(AA) = P(BB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ;  $P(ABB) = P(BAA) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ ;  
 $P(ABAA) = P(BABB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ ;  
 $P(ABABB) = P(BABAA) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$ .

Portanto a probabilidade de uma equipe vencer a série de jogos com duas vitórias seguidas é

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{15}{16}$$