Gabarito - Matemática – Grupo G

1ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Avaliador

Revisor

Um restaurante cobra, no almoço, até as 16 h, o preço fixo de R$ 15,00 por pessoa. Após as 16h, esse valor cai para R$ 12,00.

Em determinado dia, 50 pessoas almoçaram no restaurante, sendo **X** o número de pessoas que almoçaram até as 16 h.

Sabendo que o custo de um almoço é R$ 8,00 por pessoa e o lucro obtido pelo restaurante naquele dia foi maior que R$ 250,00 e menor que R$ 300,00, determine o menor e o maior valores possíveis de **X**.

Cálculos e respostas:

Sendo **x** o nº de pessoas que almoçaram até as 16:00 horas, tem-se que o lucro L em função de **x** é dado pela seguinte expressão:

L = Receita – Custo

Custo = 50.8

Receita = 15x + 12.(50 – x)

L = L(x) = 200 + 3x

Logo:

$$250 < 200 + 3x < 300$$

$$50 < 3x < 100$$

$$\frac{50}{3} < x < \frac{100}{3}$$

Assim, o menor valor possível para x é 17 e o maior valor possível para x é 33.

Gabarito - Matemática – Grupo G

2ª QUESTÃO: (1,0 ponto) Avaliador Revisor

Quinze (15) pessoas, sendo 5 homens de alturas diferentes e 10 mulheres também de alturas diferentes, devem ser dispostas em fila, obedecendo ao critério: homens em ordem crescente de altura e mulheres em ordem decrescente de altura.

De quantos modos diferentes essas 15 pessoas podem ser dispostas nesta fila?

Cálculos e respostas:

Ordenamos os 5 homens em 5 lugares dos 15 e as 10 mulheres ocuparão os 10 lugares restantes. Para isto, basta considerarmos as possibilidades de que os homens estejam na fila. Tem-se:

$$C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15.14.13.12.11.10!}{5.4.3.2.1.10!} = 3003$$

3ª QUESTÃO: (1,5 ponto)

Avaliador

Revisor

Determine o conjunto-solução, em $\mathbb{R}$, de cada equação dada a seguir:

(i) $\log x^2 = 2 \log x$

(ii) $\sqrt{x^2} = -x$

(iii) $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

(iv) $\left(x^2+1\right)^{\sqrt{x+1}} = 1$

Cálculos e respostas:

(i) $\mathbb{R}_+^*$

(ii) $\mathbb{R}_-$

(iii) $\mathbb{R}_+$

(iv) $\{-1,0\}$

Gabarito - Matemática – Grupo G

4ª QUESTÃO: (1,5 ponto) Avaliador Revisor

Um dos problemas mais antigos da história da Matemática encontra-se enunciado no célebre Papiro de Rhind (~ de 2000 a 1500 a.C.) que é transcrito a seguir, convenientemente adaptado:

“Entre cinco pessoas foram repartidas cem medidas de trigo, de tal modo que a segunda recebeu, a mais do que a primeira, tanto quanto a terceira recebeu a mais do que a segunda; da mesma forma, a quarta recebeu a mais do que a terceira tanto quanto a terceira recebeu a mais do que a segunda; assim como, a quinta recebeu a mais do que a quarta tanto quanto a quarta recebeu a mais do que a terceira.”

Além disso, a soma das quantidades que as três últimas receberam é igual a sete vezes a soma das quantidades que as duas primeiras receberam. Quanto a quarta pessoa recebeu?

Cálculos e respostas:

Seja x a quantidade que a primeira pessoa recebeu e r a quantidade que a segunda pessoa recebeu a mais do que a primeira. Assim,

$$1^a \ pessoa \to x$$
$$2^a \ pessoa \to x + r$$
$$3^a \ pessoa \to x + 2r$$
$$4^a \ pessoa \to x + 3r$$
$$5^a \ pessoa \to x + 4r$$

Logo, pelos dados do problema, temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} x + (x + r) + (x + 2r) + (x + 3r) + (x + 4r) = 100 \\ (x + 2r) + (x + 3r) + (x + 4r) = 7(x + x + r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 10r = 100 \\ 3x + 9r = 14x + 7r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2r = 20 & (1) \\ 11x = 2r \quad \Rightarrow r = \dfrac{11x}{2} & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

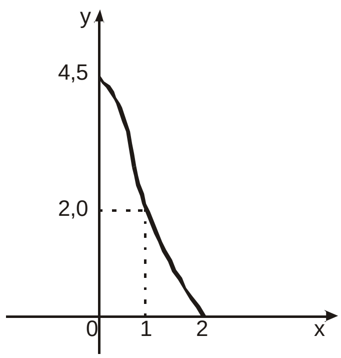
$$x + 2.\frac{11x}{2} = 20 \Rightarrow 12x = 50 \Rightarrow x = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \Rightarrow r = \frac{11}{2}.\frac{5}{3} = \frac{55}{6}$$

Assim, à quarta pessoa coube $x + 3r = \dfrac{5}{3} + 3.\dfrac{55}{6} = \dfrac{175}{6}$ medidas de trigo.

$5^{\underline{a}}$ QUESTÃO: (1,5 ponto)

Avaliador | Revisor

Uma parte do esboço do gráfico de uma função polinomial f é dada na figura:



Sabe-se que a função f possui somente três raízes: a raiz x = 2 e outras duas que são reais e simétricas.

Determine:

a) a expressão polinomial que define f.
b) o(s) intervalo(s) em que f é positiva.

Cálculos e respostas:

a) A expressão de f é dada por: f(x)=a(x-2)(x-b)(x+b). Usando as informações do gráfico, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{9}{2} = f(0) = a(-2)(-b)(b) = 2ab^2 \Rightarrow \frac{9}{4} = ab^2 & (i) \\ 2 = f(1) = a(-1)(1-b)(1+b) = -a(1-b^2) & (ii) \end{cases}$$

Substitutindo (ii) em (i), obtemos: $2 = -a + \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$

Substituindo este valor em (i), obtemos: $\frac{9}{4} = \frac{1}{4}b^2 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ ou $b = -3$.

Logo, $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)(x-3)(x+3)$.

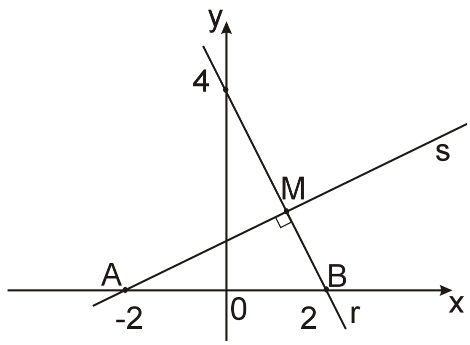
b) Construímos o quadro de sinais da função f:

		–3	2	3
x+3	-	+	+	+
x-2	-	-	+	+
x-3	-	-	-	+
f	-	+	-	+

Logo, f é positiva em $]-3,2[\cup]3,+\infty[$

6ª QUESTÃO: (1,5 ponto) Avaliador Revisor

Na figura a seguir estão representadas as retas r e s, perpendiculares entre si:



Determine a equação da parábola que passa pelos pontos A, M e B.

Cálculos e respostas:

Note que a equação da reta r é dada por $y = -\frac{4}{2}x + 4$, isto é $y = -2x + 4$.

Como a reta s é perpendicular à reta r, temos $m_s = -\frac{1}{m_r} = \frac{1}{2}$. Por outro lado, (-2,0) $\in$ s. Logo,

$$0 = \frac{1}{2}(-2) + p \Rightarrow p = 1.$$

Assim, a equação da reta r é dada por $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Para encontrar o ponto M, resolve-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y + 2x = 4 \\ y - \frac{1}{2}x = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2}x = 3 \Rightarrow x = \frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{8}{5} \Rightarrow M = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

A equação de uma parábola que passa pelos pontos A e B é dada por y = a(x+2)(x-2). Como o que se pede é a equação da parábola que passa também por M, temos:

$$\frac{8}{5} = a\left(\frac{6}{5} + 2\right)\left(\frac{6}{5} - 2\right) \Rightarrow a = -\frac{5.8}{64} = -\frac{5}{8}.$$

Logo, a equação da parábola pedida é

$$y = -\frac{5}{8}(x + 2)(x - 2)$$

7ª QUESTÃO: (1,0 ponto) Avaliador Revisor

Uma amostra, de um determinado minério, de massa M_1 contém 72% de ferro. Uma outra amostra de massa M_2 contém 58% de ferro. Sabendo que $M_1 = 0,4\ M_2$, determine o percentual de ferro contido na mistura das duas amostras.

Cálculos e respostas:

Quantidade de ferro contida na primeira amostra: $0,72\ M_1$.
Quantidade de ferro contida na outra amostra: $0,58\ M_2$.
Quantidade de ferro contida na mistura:

$$0,72\ M_1 + 0,58\ M_2 = (0,72)(0,4)\ M_2 + 0,58\ M_2 = 0,868\ M_2.$$

Percentual de ferro contido na mistura

$$\frac{0,868\ M_2}{M_1 + M_2} = \frac{0,868 M_2}{1,4 M_2} = 0,62.$$

Logo, há 62% de ferro contido na amostra.

Gabarito - Matemática – Grupo G

8ª QUESTÃO: (1,0 ponto) Avaliador Revisor

Sejam f e g funções reais de uma variável real dadas por

$$f(x)=\begin{cases}3x+4, & \text{se } x \geq 1\\ 5x+2, & \text{se } x < 1\end{cases} \quad \text{e} \quad g(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{se } x > 3\\ 5x-5, & \text{se } x \leq 3\end{cases}$$

Pede-se:

a) g [f(2)]

b) f^{-1}[g(0)]

Cálculos e respostas:

a) f(2) = 3.2+4 = 10 $\Rightarrow$ g[f(2)] = g(10) = 10^2 + 1 = 101.
b) g(0) = 5.0 – 5 = -5 $\Rightarrow$ f^{-1}[g(0)] = f^{-1}(-5).

Assim, queremos encontrar x tal que f(x) = -5.

Temos,

$$\begin{cases}3x+4=-5 \quad \Rightarrow \quad 3x=-9 \quad \Rightarrow \quad x=-3 \quad \text{(não serve)}\\ 5x+2=-5 \quad \Rightarrow \quad 5x=-7 \quad \Rightarrow \quad x=-\dfrac{7}{5}<1\end{cases}$$

Logo,

$$f^{-1}(-5)=-\frac{7}{5}$$

ESPAÇO RESERVADO PARA RASCUNHO