1ª QUESTÃO: (1,0 ponto) Avaliador Revisor

Um dos textos chineses mais antigos é o “I-King”, ou livro das permutações. Nele aparece um diagrama numérico ‘lo-shu”, conhecido como “quadrado mágico”. A soma dos elementos de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é a mesma.

Considere o quadrado mágico representado abaixo:

4	3x	z
x	5	7y
4z	y	6

Calcule os valores de x, y e z.

Cálculos e resposta:
Do quadrado mágico obtemos, por exemplo, o sistema

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}\begin{cases} 3x+5+y \quad =15 & (2^{a}\, coluna\, e\, diagonal) \\ x+7y+5=15 & (2^{a}\, linha\, e\, diagonal) \\ 4+x+4z \quad =15 & (1^{a}\, coluna\, e\, diagonal) \end{cases}$$

De (1) e (2),

$$\begin{cases} 3x+y=10 \\ x+7y=10 \end{cases} \Rightarrow 3x+y=x+7y \Rightarrow x=3y \Rightarrow 9y+y=10 \Rightarrow \boxed{y=1} \Rightarrow x=3.1 \Rightarrow \boxed{x=3}.$$

De (3),

$$4+3+4z=15 \Rightarrow 4z=8 \Rightarrow \boxed{z=2}.$$

Gabarito - Matemática – Grupos I e J

2ª QUESTÃO: (1,0 ponto) Avaliador Revisor

Quinze (15) pessoas, sendo 5 homens de alturas diferentes e 10 mulheres também de alturas diferentes, devem ser dispostas em fila, obedecendo ao critério: homens em ordem crescente de altura e mulheres em ordem decrescente de altura.

De quantos modos diferentes essas 15 pessoas podem ser dispostas nesta fila?

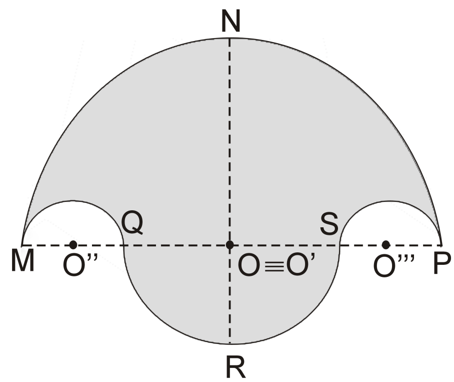
Cálculos e respostas:

Ordenamos os 5 homens em 5 lugares dos 15 e as 10 mulheres ocuparão os 10 lugares restantes. Para isto, basta considerarmos as possibilidades de que os homens estejam na fila. Tem-se:

$$C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15.14.13.12.11.10!}{5.4.3.2.1.10!} = 3003\,.$$

3ª QUESTÃO: (1,5 ponto) Avaliador Revisor

A figura abaixo mostra quatro semicircunferências: $\overset{\frown}{MNP}$, $\overset{\frown}{QRS}$, $\overset{\frown}{MQ}$ e $\overset{\frown}{SP}$, cujos centros (O, O’, O” e O’”) estão sobre o segmento $\overline{MP}$. Os diâmetros $\overline{MQ}$ e $\overline{SP}$ são iguais.



Considere **x** a medida do segmento $\overline{NR}$ e determine o valor da área da região sombreada em termos apenas de **x**.

Cálculos e resposta:

Área = Área ($\overset{\frown}{MNP}$) + Área ($\overset{\frown}{QRS}$) – Área($\overset{\frown}{MQ}$) – Área($\overset{\frown}{SP}$).

Temos,

Área ($\overset{\frown}{MNP}$) = $\frac{p}{2}(x - \overline{OR})^2$

Área ($\overset{\frown}{QRS}$) = $\frac{p}{2}(\overline{OR})^2$

Área($\overset{\frown}{MQ}$) = Área($\overset{\frown}{SP}$) = $\frac{p}{2}(\overline{O''Q})^2$

Mas,

$$x - \overline{OR} = 2\,\overline{O''Q} + \overline{OR} \Rightarrow \overline{O''Q} = \frac{x - 2\,\overline{OR}}{2}.$$

Assim,

Área = $\frac{p}{2}(x - \overline{OR})^2 + \frac{p}{2}(\overline{OR})^2 - 2.\frac{p}{2}\left(\frac{x}{2} - \overline{OR}\right)^2$

Logo,

Área = $\frac{p}{2}(x^2 - 2x\overline{OR} + \overline{OR}^2 + \overline{OR}^2 - 2.\frac{x^2}{4} + 2x\overline{OR} - 2\overline{OR}^2) \Rightarrow$ Área = $p\,\frac{x^2}{4}$.

Gabarito - Matemática – Grupos I e J

4ª QUESTÃO: (1,5 ponto) Avaliador Revisor

Considere o número complexo z escrito na forma

$$z = r\cos\theta + i\, r\,\text{sen}\,\theta$$

sendo r um número real positivo e θ medido em radiano.

Determine os possíveis valores do ângulo θ de modo que $z^2 = \dfrac{1}{1+i}$.

Cálculos e respostas:

Se $z = r\cos\theta + i\,r\,sen\theta \Rightarrow z^2 = r^2\cos 2\theta + i\,r^2 sen 2\theta = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$

Por outro lado, $\dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i sen\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Logo, $r^2(\cos 2\theta + i sen 2\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i sen\dfrac{\pi}{4}\right)$.

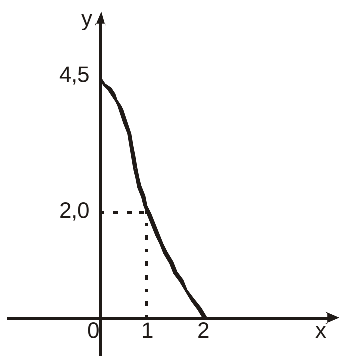
Assim, $r^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 2\theta = \cos\dfrac{\pi}{4}$ $\quad e \quad$ $sen 2\theta = -sen\dfrac{\pi}{4}$

Daí,

$r = \dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}$ e $2\theta = -\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{8} + n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

5ª QUESTÃO: (1,5 ponto) Avaliador Revisor

Uma parte do esboço do gráfico de uma função polinomial f é dada na figura:



Sabe-se que a função f possui somente três raízes: a raiz x = 2 e outras duas que são reais e simétricas.

Determine:

a) a expressão polinomial que define f.

b) o(s) intervalo(s) em que f é positiva.

Cálculos e respostas:

a) A expressão de f é dada por: f(x)=a(x-2)(x-b)(x+b). Usando as informações do gráfico, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{9}{2} = f(0) = a(-2)(-b)(b) = 2ab^2 \Rightarrow \frac{9}{4} = ab^2 & (i) \\ 2 = f(1) = a(-1)(1-b)(1+b) = -a(1-b^2) & (ii) \end{cases}$$

Substitutindo (ii) em (i), obtemos: $2 = -a + \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$

Substituindo este valor em (i), obtemos: $\frac{9}{4} = \frac{1}{4}b^2 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \quad \text{ou} \quad b = -3$.

Logo, $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)(x-3)(x+3)$.

b) Construímos o quadro de sinais da função f:

		–3	2	3
x+3	-	+	+	+
x-2	-	-	+	+
x-3	-	-	-	+
f	-	+	-	+

Logo, f é positiva em $]-3,2[\,\cup\,]3,+\infty[$

6ª QUESTÃO: (1,5 ponto) Avaliador Revisor

Após acionado o "flash" de uma câmera fotográfica, a bateria começa imediatamente a recarregar o capacitor que armazena uma quantidade de carga elétrica (medida em Coulomb) dada por:

$$Q = Q(t) = Q_o\,(1 - e^{-\lambda t})$$

sendo

- $Q(t)$ a carga elétrica armazenada até o instante t, medido em segundo;
- Q_o a carga máxima e
- λ uma constante.

Considerando $\lambda = \frac{1}{2}$ e $\ell n10 = 2,3$, determine:

a) a expressão de t em função de Q.

b) o tempo necessário para que o capacitor recarregue 90% da carga máxima.

Cálculos e respostas:

a) $Q = Q_o(1 - e^{-\frac{1}{2}t}) \Rightarrow \frac{Q}{Q_o} = 1 - e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow e^{-\frac{t}{2}} = 1 - \frac{Q}{Q_o} \Rightarrow -\frac{t}{2} = \ln\left(1 - \frac{Q}{Q_o}\right)$

Logo,

$$\boxed{t = -2\ln\left(1 - \frac{Q}{Q_o}\right)}$$

b) Temos,

$$Q = 0,9Q_o \Rightarrow t = -2\ln(1 - \frac{0,9Q_o}{Q_o}) \Rightarrow t = -2\ln(0,1) \Rightarrow t = -2(\ln 1 - \ln 10) \Rightarrow t = 2\ln 10$$

Logo,

$$\boxed{t \approx 4,6\,\mathrm{s}}$$

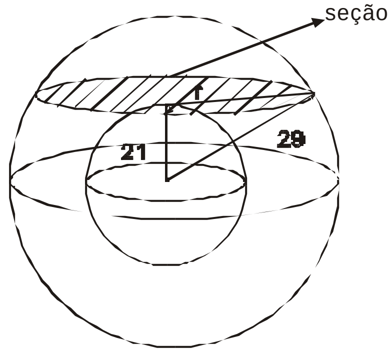
7ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Avaliador

Revisor

Os raios de duas esferas concêntricas medem 21 cm e 29 cm.
Calcule a área de uma seção feita na esfera maior por um plano tangente à esfera menor.

Cálculos e respostas:



Pelo Teorema de Pitágoras,

$$(29)^2 = (21)^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = (29)^2 - (21)^2 \Rightarrow r^2 = 841 - 441 = 400.$$

Logo, a área da seção é igual a

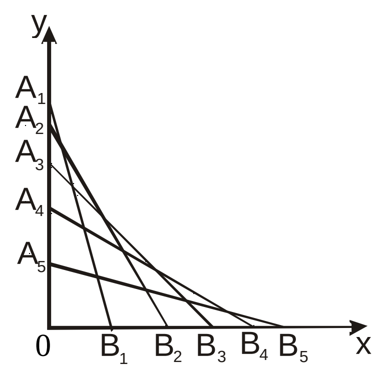
$$\pi r^2 = 400\pi \ cm^2$$

8ª QUESTÃO: (1,0 ponto)

Avaliador | Revisor

Para desenhar uma determinada curva plana foi usado o seguinte procedimento:

(i) considerou-se uma seqüência de segmentos $\overline{A_nB_n}$, todos de mesmo comprimento L, de tal modo que, para cada valor de n ($n \in \mathbb{N}$), A_n pertença ao eixo (Oy) das ordenadas e B_n pertença ao eixo (Ox) das abscissas do sistema de coordenadas cartesianas (veja figura abaixo).



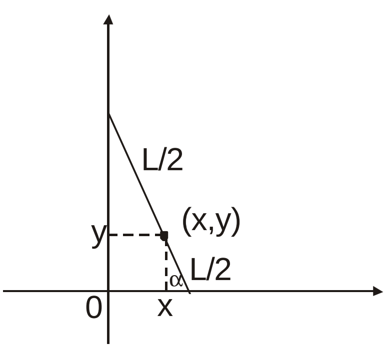
(ii) assinalou-se, em cada segmento $\overline{A_nB_n}$, o ponto médio M_n correspondente.

Considerando que o procedimento foi repetido várias vezes ($n > 2$), determine a equação cartesiana da curva plana que contém todos os pontos M_n assinalados.

Cálculos e respostas:

Observamos que

$$\begin{cases} x = L\cos a - \dfrac{L}{2}\cos a = \dfrac{L}{2}\cos a \\ y = \dfrac{L}{2} sen a \end{cases}$$



Logo,

$$x^2 + y^2 = \frac{L^2}{4}\cos^2 a + \frac{L^2}{4} sen^2 a = \frac{L^2}{4}.$$

A equação da curva é:

$$\boxed{x^2 + y^2 = \frac{L^2}{4}}$$