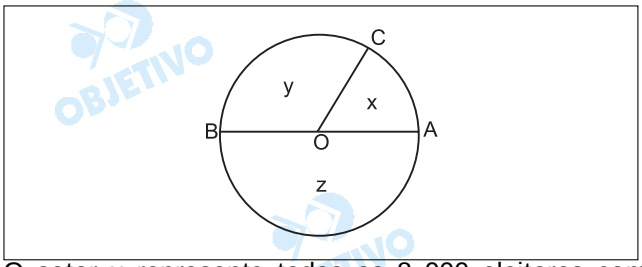
UFSCar

1ª Parte – Questões de Múltipla Escolha

Matemática

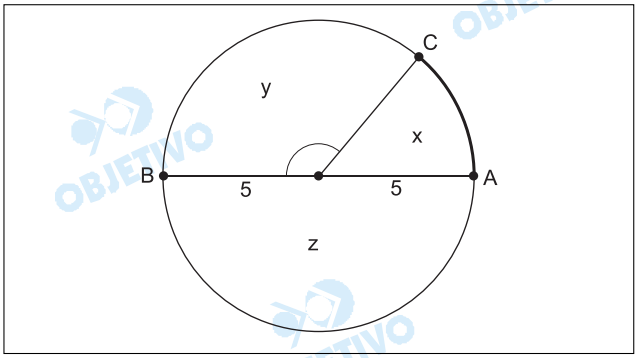
11 c

O gráfico em setores do círculo de centro O representa
a distribuição das idades entre os eleitores de uma cidade. O diâmetro $\overline{AB}$ mede 10 cm e o comprimento do menor arco AC é $\frac{5\pi}{3}$ cm.



O setor x representa todos os 8 000 eleitores com menos de 18 anos, e o setor y representa os eleitores com idade entre 18 e 30 anos, cujo número é
a) 12 000 b) 14 800 c) 16 000
d) 18 000 e) 20 800

Resolução



1) O menor arco $\overset{\frown}{AC}$ vale: $\dfrac{\frac{5\pi}{3}}{5} = \dfrac{\pi}{3}$

2) O menor arco $\overset{\frown}{BC}$ vale: $\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

3) O número de eleitores representados pelo setor y é o dobro do número de eleitores do setor x, portanto: 2 . 8 000 = 16 000

12 e

Um paciente de um hospital está recebendo soro por via intravenosa. O equipamento foi regulado para gotejar x gotas a cada 30 segundos. Sabendo-se que este número x é solução da equação $\log_4 x = \log_2 3$, e que cada gota tem volume de 0,3 mL, pode-se afirmar que o volume de soro que este paciente recebe em uma hora é de

a) 800 mL b) 750 mL c) 724 mL
d) 500 mL e) 324 mL

Resolução

1) $\log_4 x = \log_2 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \log_2 x = \log_2 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$

2) ***x*** *gotas a cada 30 segundos equivalem a* ***2x*** *gotas a cada minuto, que equivalem a* ***120x*** *gotas a cada hora.*

3) Se cada gota tem volume de 0,3 mℓ (?), então 120 . x gotas correspondem a
120 . 9 . 0,3 mℓ = 324 mℓ (para x = 9).

13 e

Em uma caixa há 28 bombons, todos com forma, massa e aspecto exterior exatamente iguais. Desses bombons, 7 têm recheio de coco, 4 de nozes e 17 são recheados com amêndoas. Se retirarmos da caixa 3 bombons simultaneamente, a probabilidade de se retirar um bombom de cada sabor é, aproximadamente,

a) 7,5% b) 11% c) 12,5%
d) 13% e) 14,5%

Resolução

A probabilidade de se retirar um bombom de cada sabor é

$$\frac{7 \cdot 4 \cdot 17}{C_{28,3}} = \frac{17}{117} \simeq 0{,}145 = 14{,}5\%$$

14 d

O par ordenado (x,y), solução do sistema $\begin{cases} 4^{x+y} = 32 \\ 3^{y-x} = \sqrt{3} \end{cases}$, é

a) $\left(5, \frac{3}{2}\right)$ b) $\left(5, -\frac{3}{2}\right)$ c) $\left(3, \frac{2}{3}\right)$

d) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ e) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Resolução

$$\begin{cases} 4^{x+y} = 32 \\ 3^{y-x} = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x+2y} = 2^5 \\ 3^{y-x} = 3^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ y - x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

15 b

Somando-se 4 ao numerador de certa fração, obtém-se
outra igual a 1. Subtraindo-se 1 do denominador da fração original, obtém-se outra igual a $\frac{1}{2}$. Os termos da fração original $\frac{A}{B}$ representam os votos de dois candidatos, A e B, que foram para o 2º turno de uma eleição, onde o candidato B obteve

a) 90% dos votos.
b) 70% dos votos.
c) 50% dos votos.
d) 30% dos votos.
e) 10% dos votos.

Resolução

*1) Se A são os votos do candidato **A** e B são os votos do candidato **B**, então, de acordo com o enunciado,*

$$\begin{cases} \frac{A + 4}{B} = 1 \\ \frac{A}{B - 1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B = -4 \\ 2A - B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 7 \end{cases}$$

*2) Considerando-se apenas os votos dos candidatos **A** e **B**, pode-se afirmar que **B** obteve 70% desses votos, pois:*

$$\frac{A}{B} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{A + B}{B} = \frac{3 + 7}{7} \Rightarrow$$

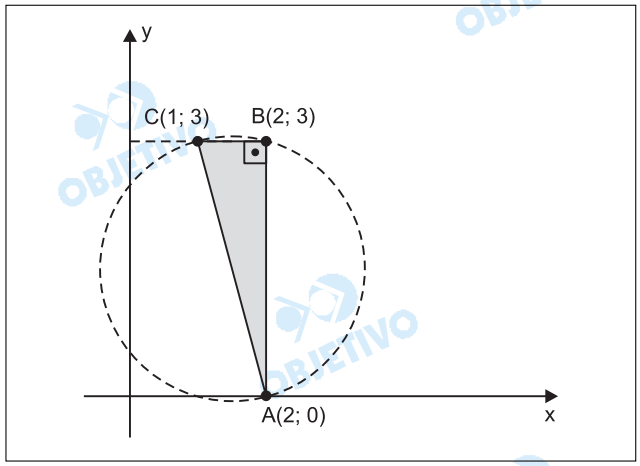
$$\Rightarrow B = \frac{7}{10}(A + B) \Rightarrow B = 70\%(A + B)$$

16 d

Dados os pontos A(2,0), B(2,3) e C(1,3), vértices de um triângulo, o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo é

a) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ e) $\sqrt{10}$

Resolução



Como o triângulo ABC é retângulo em B, então a circunferência circunscrita ao triângulo tem o segmento $\overline{AC}$ como diâmetro dessa circunferência.

Portanto, a medida do raio é:

$$raio = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{(2-1)^2 + (0-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

17 a

Considere a equação $x^2 + kx + 36 = 0$, onde x' e x" representam suas raízes. Para que exista a relação $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x"} = \frac{5}{12}$, o valor de k na equação deverá ser

a) – 15 b) – 10 c) + 12 d) + 15 e) + 36

Resolução

Se x' e x" forem as raízes da equação $x^2 + kx + 36 = 0$, então

$$\begin{cases} x' + x" = -k \ (I) \\ x' \cdot x" = 36 \ (II) \end{cases}$$

Pelo enunciado:

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x"} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{x' + x"}{x' \cdot x"} = \frac{5}{12} \ (III)$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$$\frac{-k}{36} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow k = -15$$

18 b

Numa progressão geométrica, o primeiro termo é 5^x e a razão é 5. Se a soma dos quatro primeiros termos é 3 900, pode-se afirmar que $\frac{5^{x-2}}{5}$, é igual a

a) $\frac{1}{25}$ b) $\frac{1}{5}$ c) 1 d) 5 e) 25.

Resolução

A progressão geométrica de primeiro termo 5^x e razão 5 é $(5^x; 5^{x+1}; 5^{x+2}; 5^{x+3}; \ldots)$.
A soma dos quatro primeiros termos dessa progressão é 3900 e, portanto:

$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} + 5^{x+3} = 3900 \Leftrightarrow$

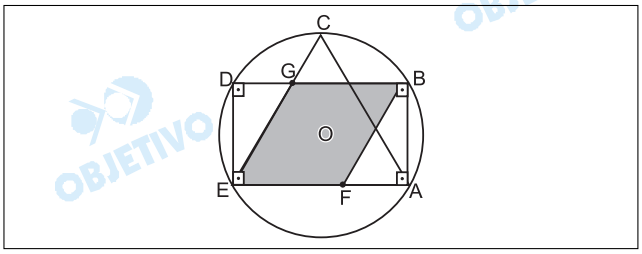
$\Leftrightarrow 5^x(1 + 5 + 25 + 125) = 3900 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^x = \frac{3900}{156} \Leftrightarrow 5^x = \frac{325}{13}$

Assim sendo: $\frac{5^{x-2}}{5} = \frac{5^x}{5^3} = \frac{625}{13 \cdot 5^3} = \frac{1}{5}$

19 a

A figura mostra um círculo de centro O e raio R = 18 cm. O segmento AB é o lado de um hexágono regular inscrito e ACE, um triângulo eqüilátero inscrito.

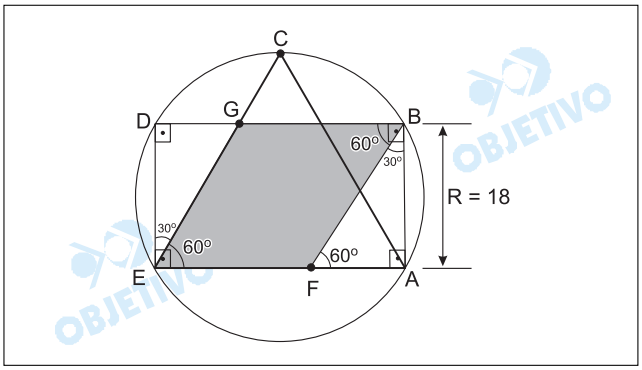


Nessas condições, a área do paralelogramo EFBG é

a) $216\sqrt{3}cm^2$ b) $180\sqrt{3}cm^2$ c) $116\sqrt{3}cm^2$

d) $120\sqrt{3}cm^2$ e) $108\sqrt{3}cm^2$

Resolução



1) AB é lado de um hexágono regular inscrito no círculo de raio R, portanto: $AB = R \Rightarrow AB = 18$

2) EA é um dos lados de um triângulo eqüilátero inscrito no círculo de raio R, assim:
$EA = R\sqrt{3} \Rightarrow EA = 18\sqrt{3}$

3) No triângulo ABF, temos: $\frac{FA}{AB} = tg\ 30° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{FA}{18} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow FA = 6\sqrt{3}$

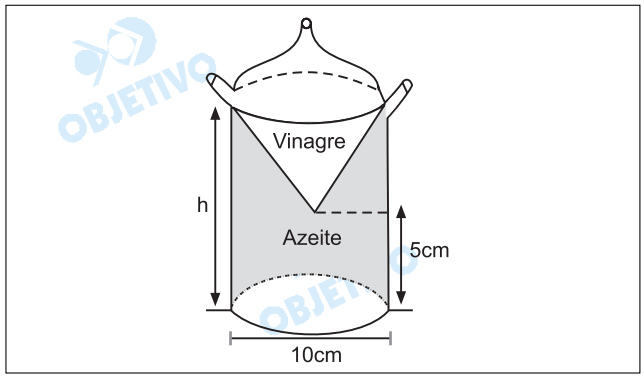
4) A área, em centímetros quadrados, do paralelogramo EFBG, é dada por:

$EF \cdot AB = (EA - FA) \cdot AB = (18\sqrt{3} - 6\sqrt{3}) \cdot 18 = 216\sqrt{3}$

20 c

A figura representa um galheteiro para a colocação de

azeite e vinagre em compartimentos diferentes, sendo um cone no interior de um cilindro.



Considerando h como a altura máxima de líquido que o galheteiro comporta e a razão entre a capacidade total de azeite e vinagre igual a 5, o valor de h é

a) 7 cm b) 8 cm c) 10 cm
d) 12 cm e) 15 cm

Resolução

Sejam V_A a capacidade total de azeite e V_V a capacidade total de vinagre, em centímetros cúbicos.
De acordo com a figura, a altura do cone é (h – 5) cm e os raios das bases do cilindro e do cone medem 5 cm.
Assim, de acordo com o enunciado, temos:

$$\frac{V_A - V_V}{V_V} = 5 \Leftrightarrow \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot h - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (h-5)}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (h-5)} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi \cdot 5^2 \cdot h - \pi \cdot 5^2 \cdot (h-5)}{\pi \cdot 5^2 \cdot (h-5)} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3h - h + 5 = 5h - 25 \Leftrightarrow h = 10$$

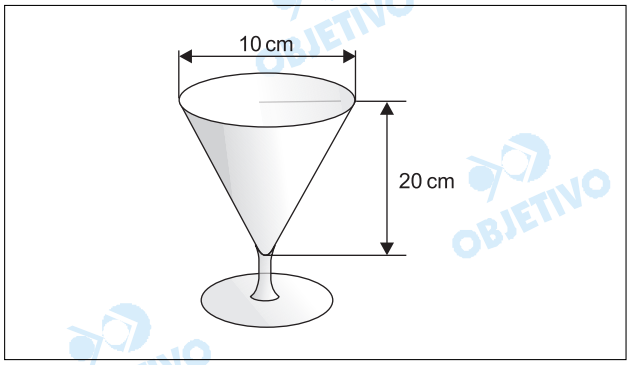
Portanto, o valor de h é 10 cm.

2ª Parte – Questões Discursivas

Matemática

36

Em uma lanchonete, um casal de namorados resolve dividir uma taça de *milk shake* com as dimensões mostradas no desenho.



a) Sabendo-se que a taça estava totalmente cheia e que eles beberam todo o *milk shake*, calcule qual foi o volume, em mL, ingerido pelo casal. Adote $\pi = 3$.

b) Se um deles beber sozinho até a metade da altura do copo, quanto do volume total, em porcentagem, terá bebido?

Resolução

a) O volume de milk shake *ingerido pelo casal é equivalente ao volume de um cone circular reto com* $\frac{1}{2}$ *dm de raio da base e 2 dm de altura, ou seja:*

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2\ dm^3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\ dm^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\ litro = 500\ m\ell$$

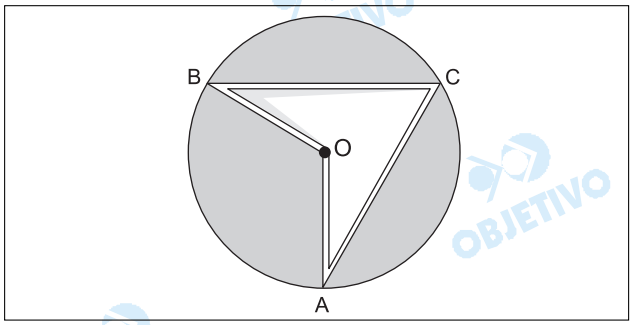
b) Se um deles beber sozinho até a metade da altura do copo, terá, então, bebido $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$ *do volume total, ou seja:*

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875 = 87{,}5\%\ \text{do volume total}$$

Respostas: *a) 500 mℓ*
b) 87,5%

37

Para fins beneficentes, foi organizado um desfile de modas num salão em forma de círculo, com 20 metros de raio. A passarela foi montada de acordo com a figura, sendo que as passarelas $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ são lados que corresponderiam a um triângulo eqüilátero inscrito na circunferência. No espaço sombreado, ocupado pela platéia, foram colocadas cadeiras, sendo uma cadeira por m^2 e um ingresso para cada cadeira.



Adotando $\sqrt{3} = 1{,}73$ e $\pi = 3{,}14$,

a) determine quantos metros cada modelo desfilou, seguindo uma única vez o roteiro $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$.
b) sabendo-se que todas as cadeiras foram ocupadas, calcule quantos ingressos foram vendidos para este evento.

Resolução

a) Sendo R a medida do raio do círculo, em metros, e s a soma dos comprimentos dos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$, também medidos em metros, de acordo com o enunciado, tem-se:

1) $AO = OB = R = 20$

2) $BC = CA = R\sqrt{3} = 20 \cdot \sqrt{3} = 34{,}6$

3) $s = BC + CA + AO + OB$

Assim: $s = 34{,}6 + 34{,}6 + 20 + 20 \Leftrightarrow s = 109{,}2$

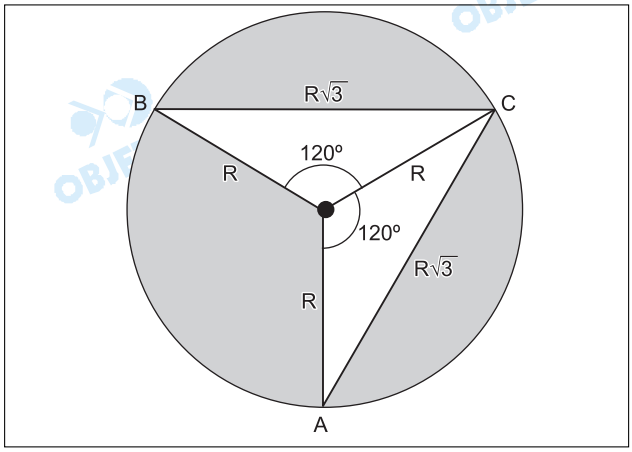
b) A área S, em metros quadrados, da região ocupada pela platéia, é dada pela diferença entre a área do círculo e a soma das áreas dos triângulos congruentes OBC e OCA.

$$\text{Assim: } S = \pi R^2 - 2 \cdot \frac{R \cdot R \cdot \operatorname{sen} 120^\circ}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = R^2 \left(\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{Logo: } S = 20^2 (3{,}14 - 0{,}865) \Leftrightarrow S = 910$$

Conclui-se, portanto, que o número total de cadeiras colocadas no espaço ocupado pela platéia, é igual a 910 e, conseqüentemente, que foram vendidos 910 ingressos para esse evento.



Respostas: *a) 109,2 metros*
b) 910 ingressos

38

Sendo sen α + cos α = $\frac{1}{5}$,

a) determine sen α e cos α.
b) represente no círculo trigonométrico todos os ângulos α que satisfazem a igualdade dada.

Resolução

a) $\begin{cases} sen\ \alpha + cos\ \alpha = \frac{1}{5} \\ sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos\ \alpha = \frac{1}{5} - sen\ \alpha \quad (I) \\ sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \quad (II) \end{cases}$

A partir do sistema, temos:

$$sen^2\alpha + \left(\frac{1}{5} - sen\ \alpha\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 \cdot sen^2\alpha - 5 \cdot sen\ \alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\ \alpha = \frac{4}{5} \text{ ou } sen\ \alpha = -\frac{3}{5}$$

Na equação (I), resulta:

$$1^o)\ \text{para } sen\ \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$2^o)\ \text{para } sen\ \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$

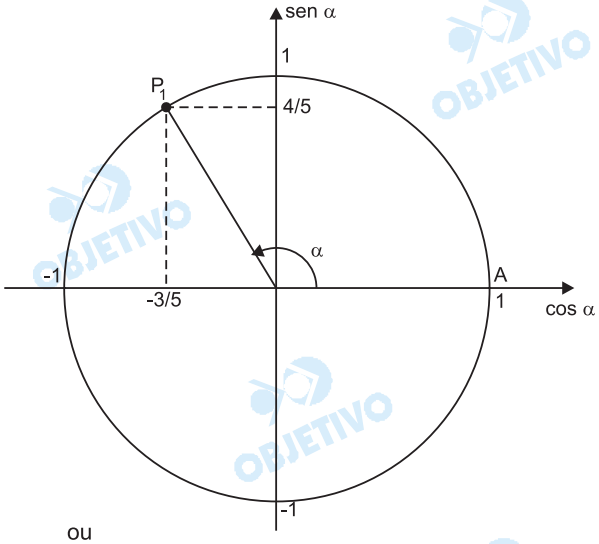
Portanto, as soluções são:

$\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$ *e* $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$

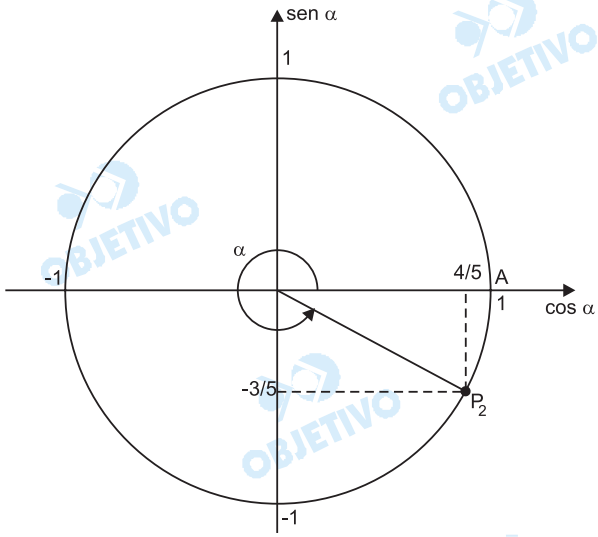
ou

$\text{sen } \alpha = -\frac{3}{5}$ *e* $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

b)



ou



Sendo:

$\alpha = \overset{\curvearrowright}{AP_1}$, *tal que* $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$ *e* $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$

ou

$\alpha = \overset{\curvearrowright}{AP_2}$, *tal que* $\text{sen } \alpha = -\frac{3}{5}$ *e* $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

Respostas: *a)* $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$ *e* $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

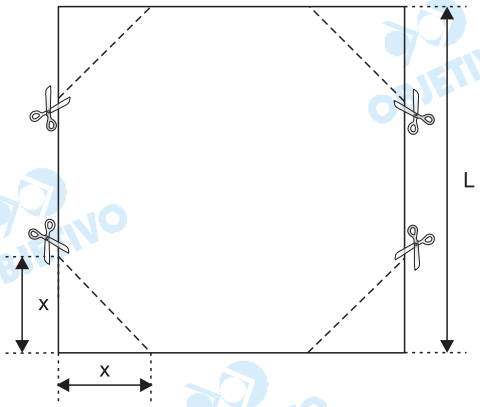
ou

$\text{sen}\,\alpha = -\frac{3}{5}$ *e* $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

b) representação gráfica

39

Uma placa de aço quadrada vai ser transformada em um octógono regular, recortando-se os quatro cantos do quadrado de forma a obter o maior polígono possível, como mostra a figura.



Sendo a medida do lado do quadrado igual a L, calcule, em função de L,

a) a medida de x.

b) o perímetro do octógono obtido.

Resolução

a) $x + x \cdot \sqrt{2} + x = L \Leftrightarrow x = \frac{L}{2+\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{L}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{L \cdot (2-\sqrt{2})}{2}$

b) O perímetro do octógono regular é

$8 \cdot x \cdot \sqrt{2} = \frac{8 \cdot L \cdot (2-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{2} = 8 \cdot (\sqrt{2}-1) \cdot L$

Respostas: *a)* $\frac{(2-\sqrt{2}) \cdot L}{2}$

b) $8 \cdot (\sqrt{2}-1) \cdot L$

40

Sejam as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \log 0{,}1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \log 0{,}01 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

Calcule:
a) o determinante da matriz (B – A).
b) a matriz inversa da matriz (B – A).

Resolução

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \log 0{,}1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} \log 0{,}01 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

Então: $B - A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ +5 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det (B - A) = 50$

b) 1) Matriz dos cofatores:

$(B - A)' = \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

2) Matriz adjunta:

$\overline{(B - A)} = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$

3) Matriz inversa de B – A:

$(B - A)^{-1} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{25} & \frac{1}{25} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$

Respostas: a) 50

b) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{25} & \frac{1}{25} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$