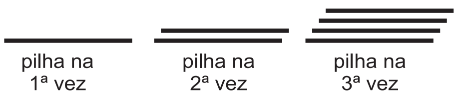
Matemática

VUNESP

ETAPA

Questão 1

Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é 0,5 cm. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houveram sido colocadas anteriormente.



Determine, ao final de 9 dessas operações,
a) quantas tábuas terá a pilha.
b) a altura, em metros, da pilha.

Resposta

a) Como o número de tábuas da pilha dobra a cada operação, ao final da 9ª operação, teremos $1 \cdot 2^8 = 256$ tábuas na pilha.
b) Supondo que não haja espaços entre as tábuas, a altura da pilha é $256 \cdot 0{,}5 = 128$ cm $= 1{,}28$ m.

Questão 2

Uma função de variável real satisfaz a condição $f(x + 2) = 2f(x) + f(1)$, qualquer que seja a variável x. Sabendo-se que $f(3) = 6$, determine o valor de
a) f(1).   b) f(5).

Resposta

a) Como qualquer que seja o real x,
$f(x + 2) = 2 \cdot f(x) + f(1)$, temos para $x = 1$:
$f(3) = 2f(1) + f(1) \Leftrightarrow 6 = 3 \cdot f(1) \Leftrightarrow f(1) = 2$.
b) Para $x = 3$:
$f(5) = 2 \cdot f(3) + f(1) = 2 \cdot 6 + 2 = 14$.

Questão 3

Dispomos de 4 cores distintas e temos que colorir o mapa mostrado na figura com os países P, Q, R e S, de modo que países cuja fronteira é uma linha não podem ser coloridos com a mesma cor.

P	Q
R	S

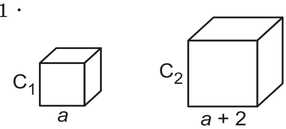
Responda, justificando sua resposta, de quantas maneiras é possível colorir o mapa, se:
a) os países P e S forem coloridos com cores distintas?
b) os países P e S forem coloridos com a mesma cor?

Resposta

Os países Q e R fazem fronteira somente com os países P e S. Portanto basta que as cores dos países Q e R sejam diferentes de cada uma das cores dos países P e S.
a) Podemos escolher a cor do país P de 4 maneiras, a cor do país S de 3 maneiras e cada uma das cores dos países Q e R de 2 maneiras. Conseqüentemente, há $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ maneiras de colorir o mapa de modo que os países P e S sejam coloridos com cores diferentes.
b) Podemos escolher a cor dos países P e S de 4 maneiras e cada uma das cores dos países Q e R de 3 maneiras. Logo há $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ maneiras de colorir o mapa de modo que os países P e S sejam coloridos com a mesma cor.

Questão 4

Aumentando em 2 cm a aresta *a* de um cubo C_1, obtemos um cubo C_2, cuja *área* da superfície total aumenta em 216 cm^2, em relação à do cubo C_1.



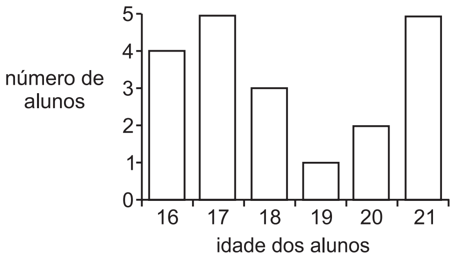
Determine:
a) a medida da aresta do cubo C_1;
b) o volume do cubo C_2.

Resposta

a) $6(a + 2)^2 - 6a^2 = 216 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a + 2 - a) \cdot (a + 2 + a) = 36 \Leftrightarrow a + 1 = 9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a = 8$ cm
b) O volume do cubo C_2 é $(a + 2)^3 = (8 + 2)^3 = 1\,000$ cm^3.

Questão 5

Num curso de Inglês, a distribuição das idades dos alunos é dada pelo gráfico seguinte.



Com base nos dados do gráfico, determine:
a) o número total de alunos do curso e o número de alunos com no mínimo 19 anos.
b) escolhido um aluno ao acaso, qual a probabilidade de sua idade ser no mínimo 19 anos ou ser exatamente 16 anos.

Resposta

a) Do gráfico temos: 4 alunos com 16 anos, 5 alunos com 17 anos, 3 alunos com 18 anos, 1 aluno com 19 anos, 2 alunos com 20 anos e 5 alunos com 21 anos, totalizando 20 alunos. Desses 20, $1 + 2 + 5 = 8$ alunos têm no mínimo 19 anos.
b) Como há 8 alunos com no mínimo 19 anos e 4 alunos com 16 anos, a probabilidade pedida é $\dfrac{8+4}{20} = \dfrac{3}{5} = 60\%$.

Questão 6

Considere a circunferência λ, de equação $(x-3)^2 + y^2 = 5$.
a) Determine o ponto $P = (x, y)$ pertencente a λ, tal que $y = 2$ e $x > 3$.
b) Se r é a reta que passa pelo centro (3,0) de λ e por P, dê a equação e o coeficiente angular de r.

Resposta

a) Como a circunferência λ de equação $(x-3)^2 + y^2 = 5$ contém $P = (x, y)$ tal que $y = 2$ e $x > 3$,

$$\begin{cases} (x-3)^2 + 2^2 = 5 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x = 2 \text{ ou } x = 4) \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 4$. *Então* $P = (4, 2)$.

b) A reta que passa pelo centro $C = (3, 0)$ de λ e por $P = (4, 2)$ tem coeficiente angular $\dfrac{y_P - y_C}{x_P - x_C} = \dfrac{2-0}{4-3} = 2$ *e uma equação de r é* $y - 0 = 2 \cdot (x-3) \Leftrightarrow 2x - y - 6 = 0$.

Questão 7

Sejam α e β constantes reais, com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, tais que $\log_{10} \alpha = 0{,}5$ e $\log_{10} \beta = 0{,}7$.
a) Calcule $\log_{10} \alpha\beta$, onde $\alpha\beta$ indica o produto de α e β.
b) Determine o valor de $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz a equação

$$\left(\frac{\alpha\beta}{10}\right)^x = (\alpha\beta)^2.$$

Resposta

a) $\log_{10} \alpha\beta = \log_{10} \alpha + \log_{10} \beta = 0{,}5 + 0{,}7 = 1{,}2$

b) $\left(\dfrac{\alpha\beta}{10}\right)^x = (\alpha\beta)^2 \Leftrightarrow \log_{10} \left(\dfrac{\alpha\beta}{10}\right)^x = \log_{10} (\alpha\beta)^2 \Leftrightarrow$

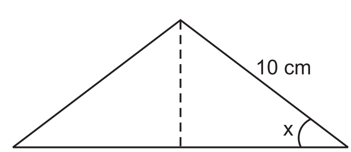
$\Leftrightarrow x \log_{10} \dfrac{\alpha\beta}{10} = 2 \log_{10} \alpha\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(\log_{10} \alpha\beta - \log_{10} 10) = 2 \log_{10} \alpha\beta$

Como $\log_{10} \alpha\beta = 1{,}2$, *temos* $x \cdot (1{,}2 - 1) = 2 \cdot 1{,}2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 12$.

Questão 8

Numa fábrica de cerâmica, produzem-se lajotas triangulares. Cada peça tem a forma de um triângulo isósceles cujos lados iguais medem 10 cm, e o ângulo da base tem medida x, como mostra a figura.



a) Determine a altura h(x), a base b(x) e a área A(x) de cada peça, em função de senx e cosx.
b) Determine x, de modo que A(x) seja igual a 50 cm^2.

Resposta

a) Como a altura é perpendicular à base, $\text{sen}\,x = \dfrac{h(x)}{10} \Leftrightarrow h(x) = 10 \cdot \text{sen}\,x$ *cm.*

O triângulo é isósceles, portanto a altura coincide com a mediana e

$$\cos x = \frac{\frac{b(x)}{2}}{10} \Leftrightarrow b(x) = 20 \cdot \cos x \text{ cm.}$$

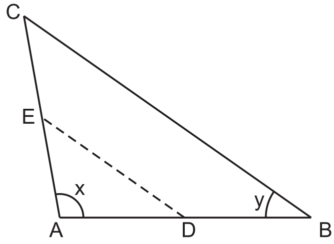
A área do triângulo é dada por $A(x) = \dfrac{b(x) \cdot h(x)}{2} = \dfrac{20 \cos x \cdot 10 \,\text{sen}\,x}{2} = 100 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x \text{ cm}^2$.

b) $A(x) = 50 \Leftrightarrow 100 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x = 50 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x = 1 \Leftrightarrow \text{sen}(2x) = 1$

Como $x \in \,]0^o;\ 90^o[$, $2x = 90^o \Leftrightarrow x = 45^o$.

Questão 9

Cinco cidades, A, B, C, D e E, são interligadas por rodovias, conforme mostra a figura.



A rodovia AC tem 40 km, a rodovia AB tem 50 km, os ângulos x, entre AC e AB, e y, entre AB e BC, são tais que senx = 3/4 e seny = = 3/7. Deseja-se construir uma nova rodovia ligando as cidades D e E que, dada a disposição destas cidades, será paralela a BC.

a) Use a lei dos senos para determinar quantos quilômetros tem a rodovia BC.

b) Sabendo que AD tem 30 km, determine quantos quilômetros terá a rodovia DE.

ver comentário

No triângulo ABC, usando a lei dos senos, temos:

$$\frac{BC}{\text{sen}\,x} = \frac{AC}{\text{sen}\,y} \Leftrightarrow \frac{BC}{\frac{3}{4}} = \frac{40}{\frac{3}{7}} \Leftrightarrow$$

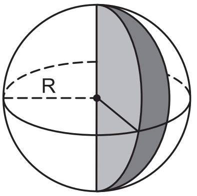
$$\Leftrightarrow BC = \frac{7}{4} \cdot 40 = 70 \text{ km}$$

Porém, como $\cos x = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = \pm \dfrac{\sqrt{7}}{4}$, *aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ABC,* $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow BC = 10\sqrt{41 \pm 10\sqrt{7}}$ *km.*

Portanto os dados do problema são inconsistentes.

Questão 10

Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida R cm foi cortada em 12 fatias iguais, onde cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.



Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio R cm é $4\pi R^2$ cm^2, determine, em função de π e de R:

a) a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico);

b) quantos cm^2 de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia.

Resposta

a) Como a melancia, de forma esférica, foi cortada em 12 fatias iguais, a área da casca de cada fatia é $\dfrac{4\pi R^2}{12} = \dfrac{\pi R^2}{3} \text{ cm}^2$.

b) A superfície total de cada fatia é formada pela casca e dois semicírculos de raio R cm. Então sua área total é $\dfrac{\pi R^2}{3} + 2 \cdot \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{4\pi R^2}{3} \text{ cm}^2$.