MATEMÁTICA

1 b

Considere os conjuntos A e B:
A = {– 30,– 20,– 10, 0,10, 20, 30} e
B = {100,200,300,400,500,600,700,800,900,1000},
e a função f : A → B, $f(x) = x^2 + 100$.
O conjunto imagem de f é,
a) {– 30,–20,–10,0,10,20,30}.
b) {100,200,500,1000}.
c) {300,400,600,700,800,900}.
d) {100,200,300,400,500,600,700,800,900,1000}.
e) conjunto vazio.

Resolução

Com os conjuntos A e B dados, a função
f: A → B, $f(x) = x^2 + 100$ *é tal que*
$f(-30) = f(30) = 30^2 + 100 = 1000$
$f(-20) = f(20) = 20^2 + 100 = 500$
$f(-10) = f(10) = 10^2 + 100 = 200$
$f(0) = 0^2 + 100 = 100.$
Desta forma, o conjunto imagem de f é
{100; 200; 500; 1000}.

2 e

Conhecendo-se os valores aproximados dos logaritmos decimais, $\log_{10}13 = 1{,}114$ e $\log_{10}15 = 1{,}176$, então, o valor de $\log_{10}195$ é

a) 0,062. b) 0,947. c) 1,056.
d) 1,310. e) 2,290.

Resolução

$\log_{10}195 = \log_{10}(15 \,.\, 13) = \log_{10}15 + \log_{10}13 =$
$= 1{,}176 + 1{,}114 = 2{,}290$

3 d

Sejam A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem. Em que condição pode-se afirmar que

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2?$$

a) Sempre, pois é uma expansão binomial.
b) Se e somente se uma delas for a matriz identidade.
c) Sempre, pois o produto de matrizes é associativo.
d) Quando o produto AB for comutativo com BA.
e) Se e somente se A = B.

Resolução

Sendo A e B matrizes quadradas de mesma ordem, temos:
$(A + B)^2 = (A + B) \,.\, (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$
Quando o produto AB = BA teremos:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

4 a

Seja a matriz M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, onde a, b, c e d $\in \mathbb{R}$. Se os números a, b, c e d, nesta ordem, constituem uma P.G. de razão q, o determinante desta matriz é igual a

a) 0. b) 1. c) q^2a^3.

d) q^3a^2. e) $2q^3a^2$.

Resolução

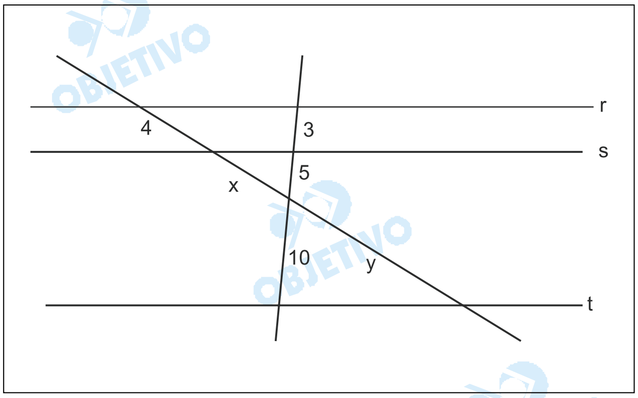
Se a, b, c e d formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão q, então b = qa e d = qc.

Assim sendo,

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & qa \\ c & qc \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = q \cdot 0 = 0$$

5 e

Considere 3 retas coplanares paralelas, r, s e t, cortadas por 2 outras retas, conforme a figura.



Os valores dos segmentos identificados por x e y são, respectivamente,

a) $\frac{3}{20}$ e $\frac{3}{40}$. b) 6 e 11. c) 9 e 13.

d) 11 e 6. e) $\frac{20}{3}$ e $\frac{40}{3}$.

Resolução

Do Teorema de Tales concluímos que

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x} = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{20}{3} \\ y = \dfrac{10x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{20}{3} \\ y = \dfrac{40}{3} \end{cases}$$

6 c

Por hipótese, considere

a = b

Multiplique ambos os membros por a

$a^2 = ab$

Subtraia de ambos os membros b^2

$a^2 - b^2 = ab - b^2$

Fatore os termos de ambos os membros
$(a + b)(a - b) = b(a - b)$
Simplifique os fatores comuns
$(a + b) = b$
Use a hipótese que $a = b$
$2b = b$
Simplifique a equação e obtenha
$2 = 1$
A explicação para isto é:
a) a álgebra moderna quando aplicada à teoria dos conjuntos prevê tal resultado.
b) a hipótese não pode ser feita, pois como $2 = 1$, a deveria ser $(b + 1)$.
c) na simplificação dos fatores comuns ocorreu divisão por zero, gerando o absurdo.
d) na fatoração, faltou um termo igual a $-2ab$ no membro esquerdo.
e) na fatoração, faltou um termo igual a $+2ab$ no membro esquerdo.

Resolução
Observando que por hipótese $a = b$, concluímos que $a - b = 0$. Assim, na simplificação dos fatores comuns ocorreu divisão por zero, gerando um absurdo.

7 d

Se $\cos(x) = a$, para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, e assumindo que $a \neq 0$ e $a \neq 1$, o valor de $tg(2x)$ é,

a) $\dfrac{2a^2 - 1}{2a\sqrt{1 - a^2}}$.   b) $\dfrac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$.

c) $2a\sqrt{1 - a^2}$.   d) $\dfrac{2a\sqrt{1 - a^2}}{2a^2 - 1}$.

e) $2a^2 - 1$.

Resolução
Se $\cos x = a$, para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, e assumindo que $a \neq 0$ e $a \neq 1$, então: $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - a^2}$.
Como $\operatorname{sen}(2x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$,
$\cos(2x) = 2 \cdot \cos^2 x - 1$ e $tg(2x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}$, resulta:

$$tg(2x) = \frac{2 \cdot \sqrt{1 - a^2} \cdot a}{2 \cdot a^2 - 1}.$$

8 a

Se quadruplicarmos o raio da base de um cilindro, mantendo a sua altura, o volume do cilindro fica multiplicado por
a) 16.   b) 12.   c) 8.   d) 4.   e) 4π.

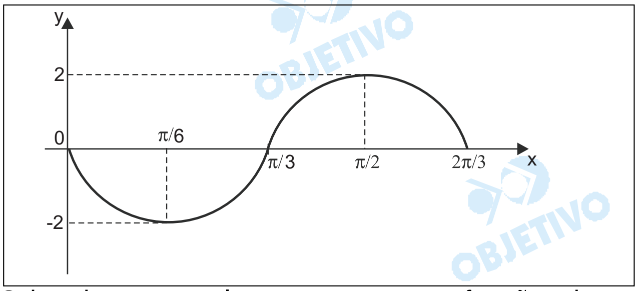
Resolução
Sendo V_1 o volume do cilindro de raio da base R e altu-

ra h e V_2 o volume do cilindro de raio da base 4R e altura h, tem-se:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi \cdot (4R)^2 \cdot h}{\pi \cdot R^2 \cdot h} = 16 \Rightarrow V_2 = 16V_1.$$

9 b

Observe o gráfico.



Sabendo-se que ele representa uma função trigonométrica, a função y(x) é

a) – 2 cos(3x). b) – 2 sen(3x). c) 2 cos(3x).
d) 3 sen(2x). e) 3 cos(2x).

Resolução

De acordo com o gráfico temos que a função é definida por uma sentença do tipo y = a . sen(kx), com a < 0 e k > 0.

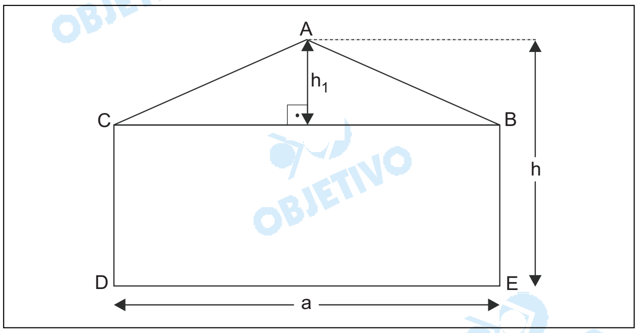
Se a imagem da função é [– 2; 2] resulta a = – 2.

Se o período da função é $\frac{2\pi}{3}$, resulta k = 3.

Logo, a função é tal que y = – 2 sen(3x).

10 e

Considere um envelope aberto, disposto como um triângulo isósceles sobre um retângulo, conforme a figura, onde $h_1 = \frac{1}{3}h$.



As áreas do triângulo ABC e do retângulo BCDE, denotadas respectivamente por A_T e A_R, podem ser calculadas em termos de a e de h. Seja a razão $p = \frac{A_T}{A_R}$. Se o valor de a for multiplicado por 2, qual será a alteração que ocorrerá na razão p?

a) p é multiplicada por $\frac{1}{4}$.

b) p é multiplicada por 2.
c) p é multiplicada por 4.
d) p é multiplicada por ah.
e) p é invariante, pois independe de a.

Resolução

Conforme os dados da figura,

$$p = \frac{A_T}{A_R} = \frac{\frac{1}{2} \,.\, a \,.\, h_1}{a \,.\, (h - h_1)} = \frac{\frac{1}{2} \,.\, a \,.\, \frac{1}{3} h}{a \,.\, \frac{2h}{3}} = \frac{1}{4}.$$

Se o valor de ***a*** *for multiplicado por 2, p não varia, pois p é constante e igual a* $\frac{1}{4}$.

11 c

O conselho administrativo de um sindicato é constituído por doze pessoas, das quais uma é o presidente deste conselho. A diretoria do sindicato tem quatro cargos a serem preenchidos por membros do conselho, sendo que o presidente da diretoria e do conselho não devem ser a mesma pessoa. De quantas maneiras diferentes esta diretoria poderá ser formada?

a) 40. b) 7 920. c) 10 890.
d) 11!. e) 12!.

Resolução

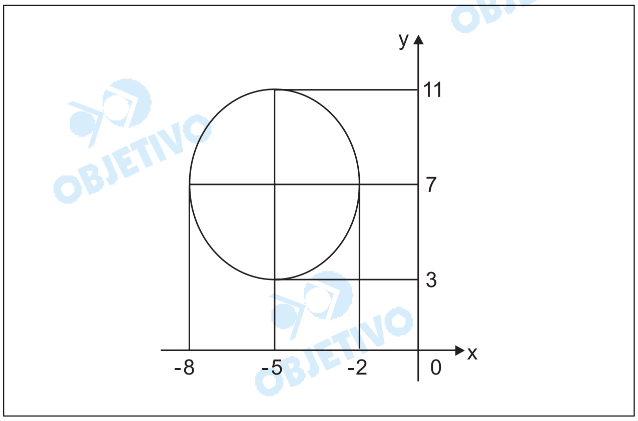
Admitindo-se que os quatro cargos de diretoria sejam distintos (diretor presidente, diretor financeiro, diretor social e diretor administrativo, por exemplo), tem-se que:

1) o presidente da diretoria pode ser qualquer um dos onze membros não presidentes do conselho.
2) os três outros cargos serão escolhidos entre os onze restantes membros do conselho.
3) desta forma, a quantidade de maneiras diferentes de se formar esta diretoria é:

$$11 \,.\, A_{11,3} = 11 \,.\, 11 \,.\, 10 \,.\, 9 = 10890.$$

12 b

A figura representa uma elipse.



A partir dos dados disponíveis, a equação desta elipse é

a) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{7} = 1.$

b) $\dfrac{(x+5)^2}{9} + \dfrac{(y-7)^2}{16} = 1.$

c) $(x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 1.$

d) $\dfrac{(x-5)^2}{9} + \dfrac{(y+7)^2}{16} = 1.$

e) $\dfrac{(x+3)^2}{5} + \dfrac{(y-4)^2}{7} = 1.$

Resolução

A elipse da figura tem centro C(– 5;7) e semi-eixos a = 4 e b = 3.

A equação reduzida da elipse, representada na figura, com centro C(g;h) e semi-eixos a e b, é:

$$\frac{(x-g)^2}{b^2} + \frac{(y-h)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} = 1$$

Comentário de Matemática

Com uma distribuição tradicional dos assuntos, a prova de matemática de conhecimentos gerais da UNESP apresentou questões apropriadas para uma boa seleção dos candidatos. Na questão 11 faltou esclarecer que os cargos da diretoria eram distintos.