22

Dados os números n e m ∈ N,

a) calcule o valor de n de modo a satisfazer

$$\frac{(n+1)!}{n!} = 9.$$

b) Sabendo-se que $b_m = \dfrac{(m+1)!}{(m+2)!}\,(m^2 - 4)$, calcule b_{137}.

Resolução

Sendo m e n dois números naturais, temos:

a) $\dfrac{(n+1)!}{n!} = 9 \Leftrightarrow \dfrac{(n+1)\,.\,n!}{n!} = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n + 1 = 9 \Leftrightarrow n = 8$

b) $b_m = \dfrac{(m+1)!}{(m+2)!}\,.\,(m^2 - 4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_m = \dfrac{(m+1)!(m+2)\,.\,(m-2)}{(m+2)\,.\,(m+1)!} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_m = m - 2 \Rightarrow b_{137} = 137 - 2 \Rightarrow b_{137} = 135$

Respostas: *a) $n = 8$*
b) $b_{137} = 135$

23

Uma empresa que fabrica o refrigerante Refridagalera fez uma pesquisa para saber a preferência dos consumidores em relação ao seu produto e àquele de um de seus concorrentes, o Refridamoçada. Foram ouvidas 1 000 pessoas, das quais 600 consumiam somente o Refridagalera, 200 consumiam os dois, 500 consumiam somente o Refridamoçada e 100, nenhum deles. Um dos entrevistados foi escolhido ao acaso. Calcule a probabilidade de que ele seja consumidor de

a) Refridagalera e Refridamoçada.

b) Refridagalera ou Refridamoçada.

Resolução

Os dados são incompatíveis. Resolveremos a questão supondo que:

a) as pessoas ouvidas foram ***apenas*** *1000.*

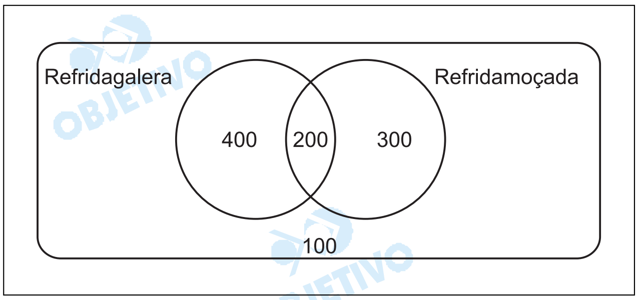
b) ***apenas*** *600 consumiam o Refridagalera e não* ***somente o Refridagalera****.*

c) ***apenas*** *500 consumiam o Refridamoçada e não* ***somente o Refridamoçada****.*

d) ***apenas*** *200 consumiam os dois.*

e) ***apenas*** *100 nenhum dos dois.*

Com estas alterações, temos o seguinte diagrama de Venn:



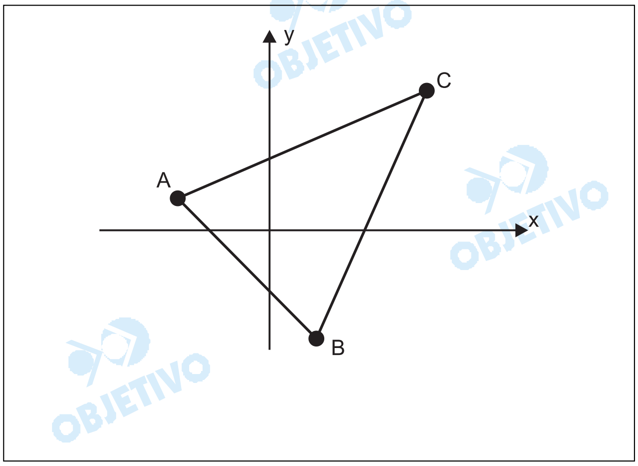
Se um dos entrevistados foi escolhido ao acaso, então a probabilidade de que ele seja consumidor de:

a) Refridagalera e Refridamoçada é $\dfrac{200}{1000} = 20\%$.

b) Refridagalera ou Refridamoçada é $\dfrac{900}{1000} = 90\%$.

24

Dados dois pontos, A e B, com coordenadas cartesianas (– 2,1) e (1,– 2), respectivamente, conforme a figura,



a) calcule a distância entre A e B.

b) Sabendo-se que as coordenadas cartesianas do baricentro do triângulo ABC são $(x_G, y_G) = (2/3, 1)$, calcule as coordenadas (x_C, y_C) do vértice C do triângulo.

Resolução

a) $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

Assim: $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (1+2)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AB = \sqrt{3^2 + 3^2} \Leftrightarrow AB = \sqrt{2 \,.\, 3^2} \Leftrightarrow AB = 3\sqrt{2}$

b) $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$ e $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Assim: $\dfrac{2}{3} = \dfrac{-2 + 1 + x_C}{3} \Leftrightarrow x_C = 3$

e $1 = \dfrac{1 - 2 + y_C}{3} \Leftrightarrow y_C = 4$

Respostas: *a)* $AB = 3\sqrt{2}$

b) $C(3;4)$

25

Considere a variável complexa z dada por z = x + i y, onde i é o número imaginário $\sqrt{-1}$, e seja $\bar{z}$ o complexo conjugado de z.

a) Dada a equação $(z - a)(\bar{z} - a) = r^2$, onde r e a $\in \mathbb{R}$, calcule e responda a qual configuração geométrica ela corresponde.

b) Escreva a equação do círculo $x^2 + y^2 = R^2$, $R \in \mathbb{R}$, em variáveis complexas.

Resolução

a) Se z = x + iy, então

$(z - a)(\bar{z} - a) = r^2 \Leftrightarrow (x + iy - a)(x - iy - a) = r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - a)^2 - (iy)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + y^2 = r^2$, *que no plano cartesiano pode ser:*

1) o ponto de coordenadas (a;0) se r = 0.

2) a circunferência de centro (a;0) e raio |r|, se r ≠ 0.

b) Interpretando-se "equação do círculo $x^2 + y^2 = R^2$" como "equação da circunferência $x^2 + y^2 = R^2$", tem-se que:

$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x^2 - (-y^2) = R^2 \Leftrightarrow x^2 - (iy)^2 = R^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + iy)(x - iy) = R^2 \Leftrightarrow z \,.\, \bar{z} = R^2$, *onde z = x + iy.*

Respostas: *a) Um ponto ou uma circunferência.*

b) $z \,.\, \bar{z} = R^2$, *onde z = x + yi.*