MATEMÁTICA

1

Sabendo-se que (X , 3 , Y , Z , 24), nesta ordem, constituem uma P.A. de razão r,
a) escreva X, Y e Z em função de r;
b) calcule a razão r da P.A. e os valores de X, Y e Z.

Resolução

Se (X; 3; Y; Z; 24), nesta ordem, constituem uma P.A. de razão r, então

a) $X = 3 - r$, $Y = 3 + r$, $Z = 3 + 2r = 24 - r$

b) $Z = 3 + 2r = 24 - r \Leftrightarrow 3r = 21 \Leftrightarrow r = 7 \Rightarrow$
$\Leftrightarrow X = -4$, $Y = 10$ e $Z = 17$

Respostas: *a) (3 – r); (3 + r) e (3 + 2r), respectivamente.*

b) r = 7, X = – 4 , Y = 10 e Z = 17 .

2

A tabela mostra 3 números com as correspondentes mantissas de seus logaritmos na base 10.

x	Mantissa de x
301	4786
303	4814
304	4829

a) Escreva os valores dos $\log_{10}(x)$.
b) Calcule os valores aproximados de $\log_{10}(3,04)$, $\log_{10}(3010)$ e $\log_{10}(302)$.

Resolução

a) $\log_{10}301 = 2 + 0,4786 = 2,4786$
$\log_{10}303 = 2 + 0,4814 = 2,4814$
$\log_{10}304 = 2 + 0,4829 = 2,4829$

b) $\log_{10}(3,04) = 0 + 0,4829 = 0,4829$
$\log_{10}(3010) = 3 + 0,4786 = 3,4786$

$$\log(302) \cong \frac{\log 301 + \log 303}{2} =$$

$$= \frac{2,4786 + 2,4814}{2} = 2,4800.$$

Respostas: *a) $\log_{10}(301) = 2,4786$, $\log_{10}(303) = 2,4814$ e $\log_{10}(304) = 2,4829$.*
b) $\log_{10}(3,04) = 0,4829$, $\log_{10}(3010) = 3,4786$ e $\log_{10}(302) = 2,4800$.

3

Resolva as equações exponenciais, determinando os correspondentes valores de x.

a) $7^{(x-3)} + 7^{(x-2)} + 7^{(x-1)} = 57$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2} = -207$

Resolução

a) $7^{(x-3)} + 7^{(x-2)} + 7^{(x-1)} = 57 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7^{x-3}[1 + 7 + 7^2] = 57 \Leftrightarrow 7^{x-3} \,.\, 57 = 57 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7^{x-3} = 1 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2} = -207 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{-x} + 3^{-x-1} - 3^{-x+2} = -207 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{-x-1}[3 + 1 - 3^3] = -207 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{-x-1} \,.\, (-23) = -207 \Leftrightarrow 3^{-x-1} = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{-x-1} = 3^2 \Leftrightarrow -x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = -3$

Respostas: *a) x = 3   b) x = – 3*

4

Dados os sistemas lineares,

$S_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ e $S_2: \begin{cases} C_1x + C_2y = 1 \\ C_1x - C_2y = 2 \end{cases}$

e admitindo-se que S_1 e S_2 são equivalentes,

a) defina o que são sistemas lineares equivalentes;

b) encontre os valores de C_1 e C_2.

Resolução

a) Dois sistemas lineares são equivalentes se, e somente se, possuírem o mesmo conjunto-solução.

b) Os sistemas lineares S_1 e S_2 são equivalentes se, e somente se, o conjunto {(1; 1)}, solução de S_1, for solução de S_2. Desta forma,

$$\begin{cases} C_1 \,.\, 1 + C_2 \,.\, 1 = 1 \\ C_1 \,.\, 1 - C_2 \,.\, 1 = 2 \end{cases} \text{ e } \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_1 & -C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 = 3 \end{cases} \text{ e } C_1 \,.\, C_2 \neq 0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{3}{2} \text{ e } C_2 = \frac{-1}{2}$$

Resposta: *a) definição.*

b) $C_1 = \dfrac{3}{2}$ *e* $C_2 = \dfrac{-1}{2}$.

5

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & a \end{pmatrix}$, uma matriz B, (2×2), e sabendo-se que det(AB) = 26,

a) expresse det(B) em termos de a.

b) Sendo $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, calcule o valor de a.

Resolução

a) $\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & a \end{pmatrix} = 3a - 2$

$\det(A\,B) = 26 \Leftrightarrow \det(A) \,.\, \det(B) = 26 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (3a - 2) \,.\, \det(B) = 26 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det(B) = \dfrac{26}{3a-2}$, com $a \neq \dfrac{2}{3}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = 2 \Rightarrow \dfrac{26}{3a-2} = 2 \Leftrightarrow$

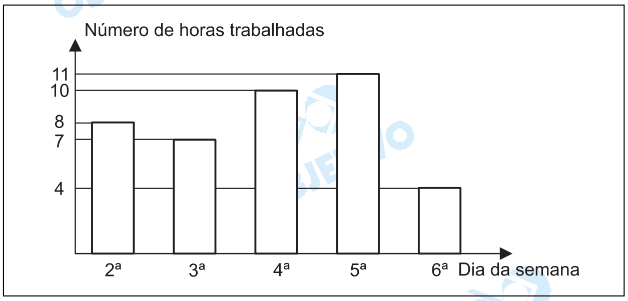
$\Leftrightarrow 26 = 6a - 4 \Leftrightarrow a = 5$

Resposta: a) $\det(B) = \dfrac{26}{3a-2}$, com $a \neq \dfrac{2}{3}$.

b) $a = 5$

6

Numa certa empresa, os funcionários desenvolvem uma jornada de trabalho, em termos de horas diárias trabalhadas, de acordo com o gráfico:
Dia da semana 2.ª 3.ª 4.ª 5.ª 6.ª



a) Em média, quantas horas eles trabalham por dia durante uma semana?
b) Numa dada semana ocorrerá um feriado de 1 dia. Qual a probabilidade de eles trabalharem ao menos 30 horas nessa semana?

Resolução

a) Em média eles trabalham ***8 horas por dia***, durante uma semana, pois

$$\frac{8 + 7 + 10 + 11 + 4}{5} = \frac{40}{5} = 8.$$

b) Os funcionários trabalharão, nessa semana, ao menos 30 horas se, e somente se, o feriado ***não ocorrer na 5ª feira***. Assim sendo:

I) Supondo que feriado seja “um dia em que se suspende o trabalho”, conforme o Dicionário Aurélio, a probabilidade pedida será $\dfrac{4}{5} = 80\%$.

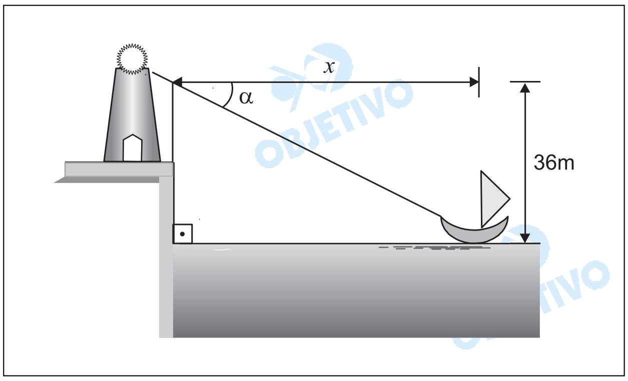
II) Supondo que feriado “seja um qualquer dos sete dias da semana (incluindo sábado e domingo)”, a probabilidade pedida será $\dfrac{6}{7} \cong 85{,}7\%$.

Respostas: a) 8 horas.

b) Ver resolução.

7

Um farol localizado a 36 m acima do nível do mar é avistado por um barco a uma distância x da base do farol, a partir de um ângulo α, conforme a figura:



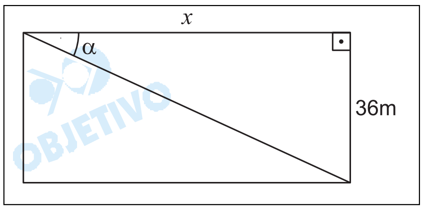
a) Admitindo-se que sen(α) = $\dfrac{3}{5}$, calcule a distância x.

b) Assumindo-se que o barco se aproximou do farol e que uma nova observação foi realizada, na qual o ângulo α passou exatamente para 2α, calcule a nova distância x' a que o barco se encontrará da base do farol.

Resolução

1º) $\left.\begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5} \\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{3}{4}$

2º)

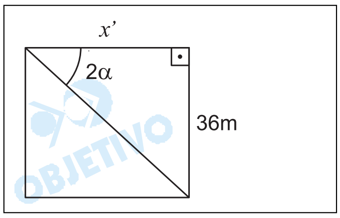


$$\text{tg } \alpha = \frac{36m}{x}$$

$$\text{Assim: } \frac{3}{4} = \frac{36m}{x} \Leftrightarrow x = 48m$$

$$3^{\text{o}})\ \text{tg } (2\alpha) = \frac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} = \frac{2 \cdot \dfrac{3}{4}}{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

4º)



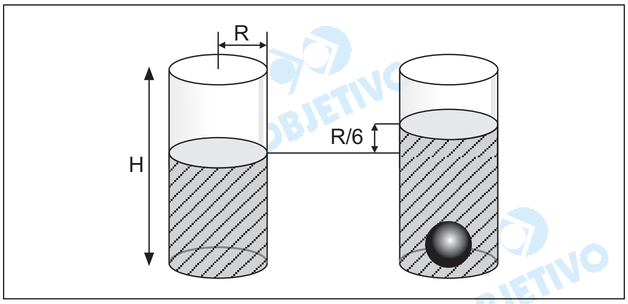
$$tg(2\alpha) = \frac{36m}{x'}$$

$$\text{Assim: } \frac{24}{7} = \frac{36m}{x'} \Leftrightarrow x' = 10{,}5m$$

Respostas: *a) x = 48m*
b) x' = 10,5m

8

Em um tanque cilíndrico com raio de base R e altura H contendo água é mergulhada uma esfera de aço de raio r, fazendo com que o nível da água suba $\frac{1}{6}$R, conforme mostra a figura.



a) Calcule o raio r da esfera em termos de R.

b) Assuma que a altura H do cilindro é 4R e que antes da esfera ser mergulhada, a água ocupava $\frac{3}{4}$ da altura do cilindro. Calcule quantas esferas de aço idênticas à citada podem ser colocadas dentro do cilindro, para que a água atinja o topo do cilindro sem transbordar.

Resolução

a) O volume da esfera de raio r é igual ao volume de um cilindro circular reto de raio da base R e altura $\frac{R}{6}$.

$$\text{Assim: } \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi R^2 \cdot \frac{R}{6} \Leftrightarrow 8r^3 = R^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2r)^3 = R^3 \Leftrightarrow 2r = R \Leftrightarrow r = \frac{R}{2}.$$

b) Sendo n o número de esferas de aço de raio

$r = \dfrac{R}{2}$, que podem ser colocadas dentro do cilindro, para que a água atinja o topo do cilindro de altura 4R, sem transbordar, tem-se:

$$n \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3\right) = \pi \cdot R^2 \left(4R - \frac{3}{4} \cdot 4R\right)$$

$$\text{Assim: } n \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \pi \cdot R^2 \cdot R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{3 \cdot 8 \cdot \pi \cdot R^3}{4 \cdot \pi \cdot R^3} \Leftrightarrow n = 6$$

Respostas: *a)* $r = \dfrac{R}{2}$. *b) 6 esferas.*

9

É dado o polinômio cúbico $P(x) = x^3 + x^2 - 2x$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule todas as raízes de P(x).

b) Esboce, qualitativamente, o seu gráfico no plano (x, P(x)), fazendo-o passar por suas raízes.

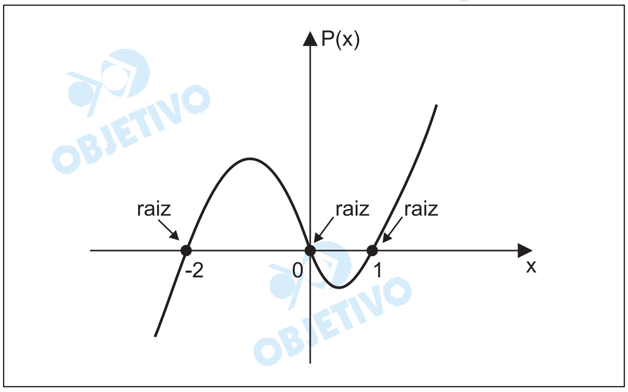
Resolução

a) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -2$

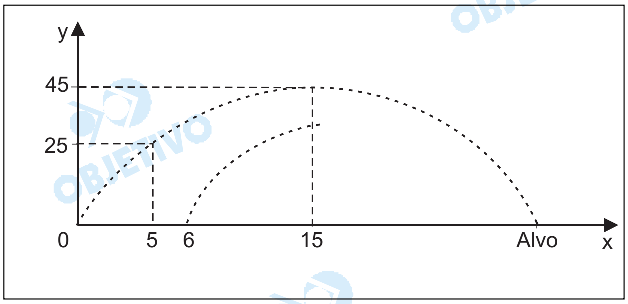
b) *O gráfico desse polinômio no plano (x; P(x)) é da forma:*



Respostas: *a) As raízes de P(x) são: – 2, 0 e 1.*
b) O gráfico acima.

10

Suponha que um projétil de ataque partiu da origem do sistema de coordenadas cartesianas descrevendo uma parábola, conforme a figura.



a) Sabendo-se que o vértice da parábola do projétil de ataque é dado pelas coordenadas (15,45) e baseado nos dados da figura, calcule a equação da parábola do projétil de ataque.

b) Um projétil de defesa é lançado a partir das coordenadas (6,0) e sua trajetória também descreve uma parábola segundo a equação $y = -0{,}25x^2 + 9x - 45$.

Considerando-se que o projétil de defesa atingirá o projétil de ataque, calcule as coordenadas onde isto ocorrerá e diga se o alvo estará a salvo do ataque.

Resolução

a) A equação da parábola do projétil de ataque é da forma:

$y = a\,(x - 0)\,(x - 30) \Leftrightarrow y = ax\,(x - 30)$, pois o alvo é o ponto (30; 0)

Como o vértice dessa parábola é o ponto (15; 45), tem-se:

$$45 = a\,.\,15\,.\,(15 - 30) \Leftrightarrow a = -\frac{1}{5}\,.$$

Portanto, a equação dessa parábola é a seguinte:

$$y = -\frac{1}{5}\,x\,(x - 30) \Leftrightarrow y = -0{,}2\,x^2 + 6x.$$

Obs.: O par ordenado (5; 25) satisfaz a equação $y = -0{,}2x^2 + 6x$.

b) O projétil de defesa atingirá o projétil de ataque num ponto P (x; y), que é o ponto de intersecção das parábolas de equações $y = -0{,}2x^2 + 6x$ e $y = -0{,}25x^2 + 9x - 45$.

Assim, a abscissa desse ponto é a solução da equação:

$$-0{,}2x^2 + 6x = -0{,}25x^2 + 9x - 45 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}05x^2 - 3x + 45 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 60x + 900 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 - 3600}}{2} \Leftrightarrow x = 30.$$

A ordenada desse ponto é:

$$y = -0{,}2\,.\,30^2 + 6\,.\,30 \Leftrightarrow y = 0.$$

Logo, o projétil de defesa atingirá o projétil de ataque no ponto P (30; 0) onde se encontra o alvo, que, portanto, não estará a salvo do ataque.

Respostas: *a) $y = -0{,}2\,x^2 + 6x$.*

b) (30; 0) e o alvo não estará a salvo do ataque.

Comentário de Matemática

Com oito questões de Álgebra, uma de Geometria e uma de Trigonometria, relativamente bem enunciadas, algumas de cunho prático, a UNESP elaborou uma prova de Matemática bem adequada à seleção dos candidatos na área de Ciências Exatas.