

# MATEMÁTICA

1

Uma pessoa possui a quantia de R\$7.560,00 para comprar um terreno, cujo preço é de R\$15,00 por metro quadrado. Considerando que os custos para obter a documentação do imóvel oneram o comprador em 5% do preço do terreno, pergunta-se:

- Qual é o custo final de cada  $m^2$  do terreno?
- Qual é a área máxima que a pessoa pode adquirir com o dinheiro que ela possui?

### Resolução

a)  $1,05 \cdot R\$ 15,00 = R\$ 15,75$

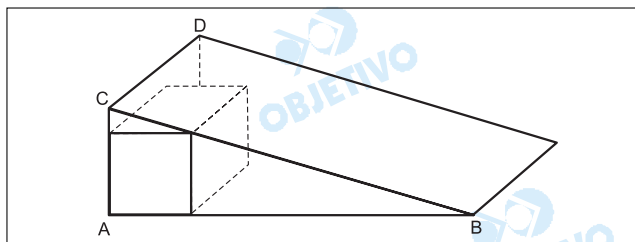
b) A área máxima que a pessoa pode adquirir, em metros quadrados, é  $7560 \div 15,75 = 480$

**Respostas:** a) R\$ 15,75      b)  $480m^2$

2

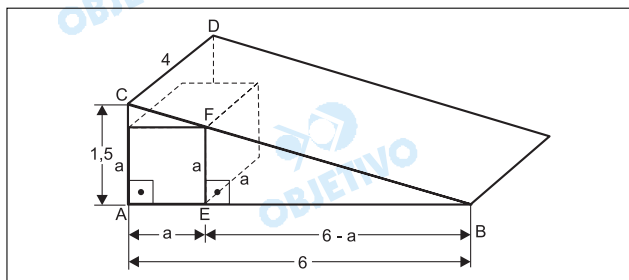
Uma caixa d'água **cúbica**, de volume máximo, deve ser colocada entre o telhado e a laje de uma casa, conforme mostra a figura ao lado.

Dados:  $\overline{AB} = 6m$      $\overline{AC} = 1,5m$      $\overline{CD} = 4m$ .



- Qual deve ser o comprimento de uma aresta da caixa?
- Supondo que a altura máxima da água na caixa é de 85% da altura da caixa, quantos litros de água podem ser armazenados na caixa?

### Resolução



Seja  $a$  a aresta da caixa cúbica, em metros, e  $V$  o volume, em litros, de água que se pode armazenar na caixa, de acordo com o enunciado, tem-se:

a) Os triângulos retângulos ABC e EBF são semelhantes.

$$\text{Assim: } \frac{AC}{EF} = \frac{AB}{EB} \Leftrightarrow \frac{1,5}{a} = \frac{6}{6-a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{4}{6-a} \Leftrightarrow 4a = 6 - a \Leftrightarrow 5a = 6 \Leftrightarrow a = 1,2$$

b)  $V = 10a \cdot 10a \cdot (0,85 \cdot 10a) = 850a^3$   
 Assim:  $V = 850 \cdot (1,2)^3 \Leftrightarrow V = 1468,8$

**Respostas:** a) 1,2m      b) 1468,8 litros

**3**

Suponha que uma tabela (incompleta) para o cálculo do imposto de renda fosse a seguinte:

Renda em reais	%	Parcela a deduzir em reais
$\leq 1000$	isento	0
1000 a 2000	15	150
2000 a 3000	20	
$\geq 3000$		475

OBS. O imposto é calculado aplicando-se à renda a porcentagem correspondente e subtraindo-se desse resultado a parcela a deduzir.

- a) Calcule os valores dos impostos a serem pagos por dois contribuintes cujas rendas são de R\$ 1.000,00 e de R\$ 2.000,00.  
 b) Escreva a tabela acima no caderno de respostas, completando-a com a parcela a deduzir para a faixa de R\$ 2.000,00 a R\$ 3.000,00 e com a alíquota que corresponde à faixa de renda superior a R\$ 3.000,00.

**Resolução**

a) 1) O contribuinte cuja renda é de R\$ 1000,00 está isento do imposto de renda.

2) O contribuinte cuja renda é de R\$ 2000,00 tem o imposto de renda igual a R\$ 150,00, pois  
 $15\% \cdot 2000 - 150 = 150$

b) 1) Se  $x$  é a parcela a deduzir dos que têm renda de 2000 a 3000 reais, então:

$$20\% \cdot 2000 - x = 150 \Rightarrow x = 250$$

2) Se  $y\%$  é a alíquota correspondente aos que têm renda maior ou igual a 3000 reais, então:

$$20\% \cdot 3000 - x = y\% \cdot 3000 - 475 \text{ e } x = 250 \Rightarrow y = 27,5$$

**Respostas:** a) zero e R\$ 150,00

b)

Renda em reais	%	Parcela a deduzir em reais
$\leq 1000$	isento	0
1000 a 2000	15	150
2000 a 3000	20	<b>x = 250</b>
$\geq 3000$	<b>y = 27,5</b>	475

**4**

Sejam  $a$  e  $b$  dois números inteiros positivos tais que  $mdc(a, b) = 5$  e o  $mmc(a, b) = 105$ .

- a) Qual é o valor de  $b$  se  $a = 35$ ?  
 b) Encontre todos os valores possíveis para  $(a,b)$ .

**Resolução**

a) 1) Se  $a$  e  $b$  são números naturais, então

$$\text{mdc}(a,b) \cdot \text{mmc}(a,b) = a \cdot b$$

2) Se  $a = 35$ , então  $5 \cdot 105 = 35 \cdot b \Leftrightarrow b = 15$

$$b) \begin{cases} \text{mdc}(a,b) = 5 \\ \text{mmc}(a,b) = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow 5 \text{ é fator comum,} \end{cases}$$

$3$  e  $7$  são fatores não-comuns.

Assim sendo:

$$\begin{cases} a = 5 \cdot 3 \\ b = 5 \cdot 7 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 5 \cdot 7 \\ b = 5 \cdot 3 \end{cases} \text{ ou}$$

$$\begin{cases} a = 5 \cdot 3 \cdot 7 \\ b = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 5 \\ b = 5 \cdot 3 \cdot 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 35 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 35 \\ b = 15 \end{cases} \text{ ou}$$

$$\begin{cases} a = 105 \\ b = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 5 \\ b = 105 \end{cases}$$

**Respostas:** a)  $b = 15$

b)  $(5; 105)$ ,  $(15; 35)$ ,  $(35; 15)$  ou  $(105; 5)$

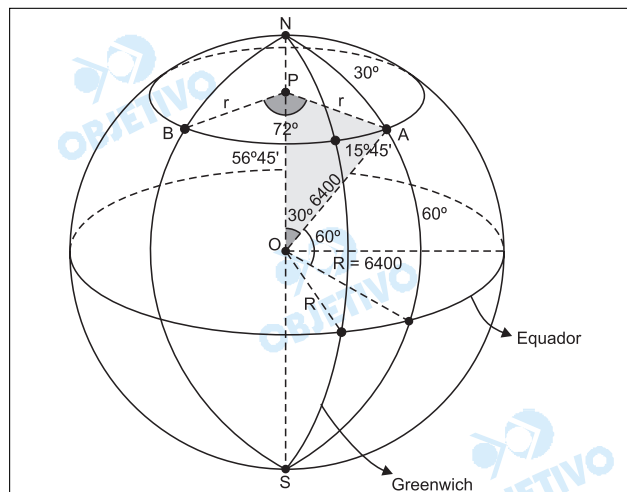
**5**

Os pontos A e B estão, ambos, localizados na superfície terrestre a  $60^\circ$  de latitude norte; o ponto A está a  $15^\circ 45'$  de longitude leste e o ponto B a  $56^\circ 15'$  de longitude oeste.

a) Dado que o raio da Terra, considerada perfeitamente esférica, mede 6.400 km qual é o raio do paralelo de  $60^\circ$ ?

b) Qual é a menor distância entre os pontos A e B, medida ao longo do paralelo de  $60^\circ$ ? [Use  $\frac{22}{7}$  como aproximação para  $\pi$ ]

**Resolução**



a) Seja  $r$  a medida, em quilômetros, do raio do paralelo de  $60^\circ$ . No triângulo retângulo POA, tem-se:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{PA}{OA}$$

$$\text{Assim: } \frac{1}{2} = \frac{r}{6400} \Leftrightarrow r = 3200$$

b) A menor distância  $x$  entre os pontos A e B, medida em quilômetros, ao longo do paralelo de  $60^\circ$ , é dada por:

$$x = \frac{15^\circ 45' + 56^\circ 15'}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{72^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 3200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 3200 \Leftrightarrow x = \frac{28160}{7}$$

**Respostas:** a) 3200km      b)  $\frac{28160}{7}$  km

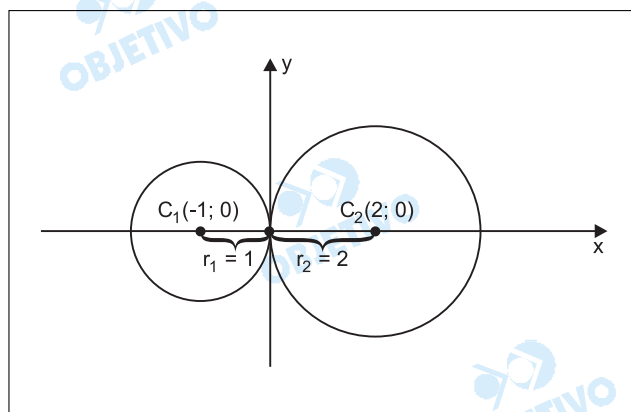
**6**

As equações  $(x + 1)^2 + y^2 = 1$  e  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$  representam duas circunferências cujos centros estão sobre o eixo das abscissas.

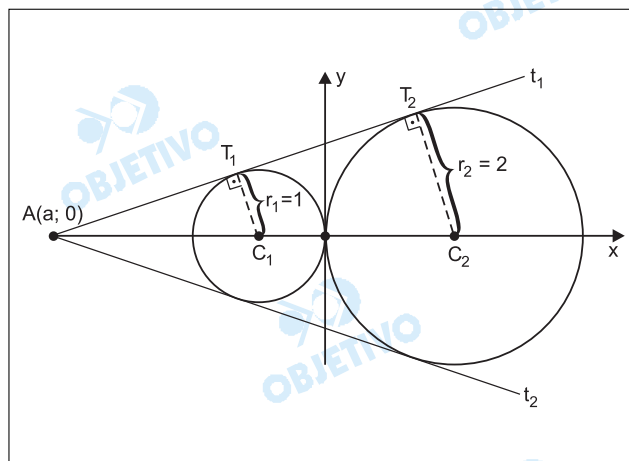
- a) Encontre, se existirem, os pontos de intersecção daquelas circunferências.
- b) Encontre o valor de  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , de modo que duas retas que passam pelo ponto  $(a, 0)$ , sejam **tangentes às duas circunferências**.

**Resolução**

- 1) A circunferência  $(x + 1)^2 + y^2 = 1$  tem centro  $C_1(-1; 0)$  e raio  $r_1 = 1$ .
- 2) A circunferência  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$  tem centro  $C_2(2; 0)$  e raio  $r_2 = 2$ .
- a) As circunferências se interceptam num único ponto: a **origem** do sistema de coordenadas cartesianas.



- b) As tangentes às duas circunferências, passando pelo ponto  $(a; 0)$ , no gráfico abaixo, são tais que:



$\Delta AT_1 C_1 \sim \Delta AT_2 C_2$  e, portanto,

$$\frac{AC_2}{AC_1} = \frac{T_2 C_2}{T_1 C_1} \Rightarrow \frac{|a| + 2}{|a| - 1} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2 \cdot |a| - 2 = |a| + 2 \Leftrightarrow |a| = 4 \Leftrightarrow a = -4$ , pois  $a < 0$   
já que o ponto  $A(a; 0)$  está no semi-eixo negativo do eixo das abscissas.

**Respostas:** a)  $(0; 0)$   
b)  $a = -4$

## 7

Considere o conjunto  $S = \{n \in \mathbb{N} : 20 \leq n \leq 500\}$ .

- Quantos elementos de  $S$  são múltiplos de 3 e de 7?
- Escolhendo-se ao acaso um elemento de  $S$ , qual a probabilidade de o mesmo ser um múltiplo de 3 ou de 7?

### Resolução

No conjunto  $S = \{20; 21; 22; \dots; 500\}$ :

- Os múltiplos de 3 são os termos da progressão aritmética  $(21; 24; 27; \dots; 498)$ , num total de 160 elementos, pois  $498 = 21 + (n - 1) \cdot 3 \Leftrightarrow n = 160$ .
- Os múltiplos de 7 são os termos da progressão aritmética  $(21; 28; 35; \dots; 497)$ , num total de 69 elementos, pois  $497 = 21 + (n - 1) \cdot 7 \Leftrightarrow n = 69$ .
- Os múltiplos de 3 e 7 são os múltiplos de 21, num total de 23, pois a progressão aritmética  $(21; 42; 63; \dots; 483)$  possui 23 termos.

Assim sendo,

- Em  $S$  existem 23 múltiplos de 3 e de 7.
- Como existem  $160 + 69 - 23 = 206$  elementos de  $S$  que são múltiplos de 3 ou de 7, a probabilidade de o elemento escolhido de  $S$  ser múltiplo de 3 ou 7 é

$$\frac{206}{500 - 19} = \frac{206}{481}$$

**Respostas:** a) 23

b)  $\frac{206}{481}$

**8**

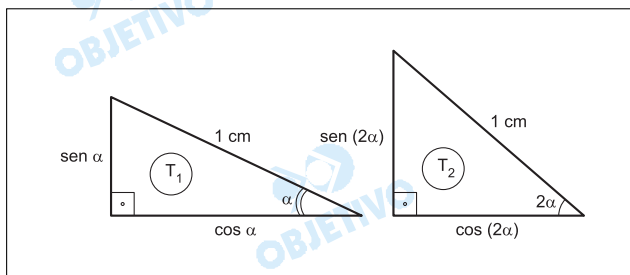
Considere dois triângulos retângulos  $T_1$  e  $T_2$ , cada um deles com sua hipotenusa medindo 1 cm. Seja  $\alpha$  a medida de um dos ângulos agudos de  $T_1$  e  $2\alpha$  a medida de um dos ângulos agudos de  $T_2$ .

a) Calcule a área de  $T_2$  para  $\alpha = 22,5^\circ$ .

b) Para que valores de  $\alpha$  a área de  $T_1$  é menor que a área de  $T_2$ ?

**Resolução**

Sejam  $T_1$  e  $T_2$  os triângulos abaixo:



a) Para  $\alpha = 22,5^\circ$ ,  $T_2$  é retângulo isósceles de catetos  $\text{sen}(2 \cdot 22,5^\circ)$  e  $\text{cos}(2 \cdot 22,5^\circ)$ , ou seja,

$\text{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $\text{cos}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . A área de  $T_2$  é:

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

b) Para que a área de  $T_1$  seja menor que a área de  $T_2$ , devemos ter:

$$\frac{\text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha}{2} < \frac{\text{sen}(2\alpha) \cdot \text{cos}(2\alpha)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(2\alpha) < 2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{cos}(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{sen } 2\alpha) [1 - 2 \text{cos}(2\alpha)] < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \text{cos}(2\alpha), \text{ pois } \text{sen } 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -60^\circ + n \cdot 360^\circ < 2\alpha < 60^\circ + n \cdot 360^\circ \quad (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -30^\circ + n \cdot 180^\circ < \alpha < 30^\circ + n \cdot 180^\circ \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Como  $\alpha$  é agudo, temos:

$$0^\circ < \alpha < 30^\circ$$

**Respostas:** a)  $\frac{1}{4}$

b)  $0^\circ < \alpha < 30^\circ$

**9**

O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por:  $T(t) = T_A + \alpha 3^{\beta t}$ , onde  $T(t)$  é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante  $t$ , dado em minutos,  $T_A$  é a temperatura ambiente, suposta constante, e  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de  $-18^\circ\text{C}$ . Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu  $0^\circ\text{C}$  após 90 minutos e chegou a  $-16^\circ\text{C}$  após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes  $\alpha$  e  $\beta$ .

b) Determine o valor de  $t$  para o qual a temperatura do

corpo no congelador é apenas  $\left(\frac{2}{3}\right)^\circ\text{C}$  superior à temperatura ambiente.

**Resolução**

a) Em graus Celsius, sendo  $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$  e  $T_A = -18^\circ$  (temperatura ambiente do congelador), tem-se:

$$1) \text{ para } t = 90, T(90) = -18 + \alpha \cdot 3^{\beta \cdot 90} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha \cdot 3^{\beta \cdot 90} = 18 \quad (I)$$

$$2) \text{ para } t = 270, T(270) = -18 + \alpha \cdot 3^{\beta \cdot 270} = -16 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha \cdot 3^{\beta \cdot 270} = 2 \quad (II)$$

Das equações (I) e (II), tem-se:

$$\frac{\alpha \cdot 3^{270\beta}}{\alpha \cdot 3^{90\beta}} = \frac{2}{18} \Leftrightarrow 3^{180\beta} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 180\beta = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{1}{90}$$

$$\text{Substituindo em (I), tem-se } \alpha \cdot 3^{-\frac{1}{90} \cdot 90} = 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 54$$

b) Em graus Celsius, e nas condições do enunciado,

com  $\alpha = 54$  e  $\beta = -\frac{1}{90}$ , temos:

$$T(t) = T_A + \left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t} = T_A + \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot 3^{\beta t} = \frac{2}{3} \Rightarrow 54 \cdot 3^{-\frac{t}{90}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{-\frac{t}{90}} = 3^{-4} \Leftrightarrow t = 360$$

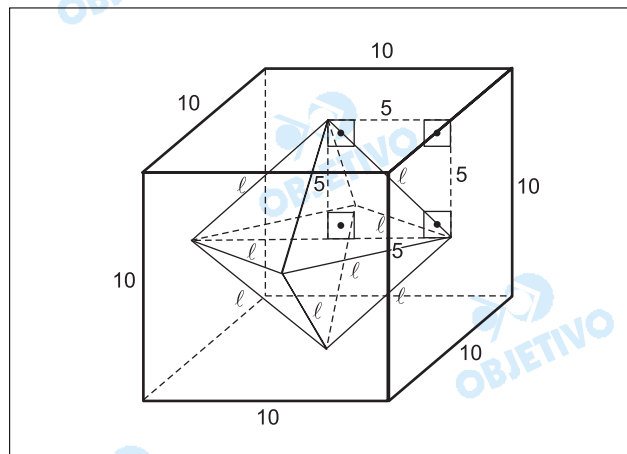
**Respostas:** a)  $\alpha = 54$  e  $\beta = -\frac{1}{90}$   
 b) 360 minutos

**10**

Considere um cubo cuja aresta mede 10cm. O sólido cujos vértices são os centros das faces do cubo é um octaedro regular, cujas faces são triângulos equiláteros congruentes.

- Calcule o comprimento da aresta desse octaedro regular.
- Calcule o volume do mesmo octaedro.

**Resolução**



Sejam:

- $l$  o comprimento, em centímetros, de cada aresta desse octaedro regular.
- $V$  o volume, em centímetros cúbicos, desse octaedro.

a)  $l$  é a diagonal de um quadrado de lado 5cm

$$\text{Assim } l = 5\sqrt{2}$$

$$b) V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot 5$$

$$\text{Assim: } V = \frac{2}{3} (5\sqrt{2})^2 \cdot 5 \Leftrightarrow V = \frac{500}{3}$$

**Respostas:** a)  $5\sqrt{2}$  cm

$$b) \frac{500}{3} \text{ cm}^3$$

**11**

Seja  $a$  um número real e seja:

$$p(x) = \det \begin{bmatrix} 3-x & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & a-x & -1 \\ 0 & 4 & 1-x \end{bmatrix}$$

- a) Para  $a = 1$ , encontre todas as raízes da equação  $p(x) = 0$ .  
 b) Encontre os valores de  $a$  para os quais a equação  $p(x) = 0$  tenha uma única raiz real.

**Resolução**

$$a) a = 1 \Rightarrow p(x) = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1-x & -1 \\ 0 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3-x) \cdot [(1-x)^2 + 4] = 0 \Leftrightarrow 3-x = 0 \text{ ou}$$

$$(1-x)^2 = -4 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } 1-x = \pm 2i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1 - 2i \text{ ou } x = 1 + 2i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \{3; 1 - 2i; 1 + 2i\}$$

$$b) p(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-x & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & a-x & -1 \\ 0 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3-x) \cdot [(a-x)(1-x) + 4] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3-x) \cdot [x^2 - (a+1)x + (a+4)] = 0$$

Essa equação tem uma única raiz real ( $x = 3$ ) quando  $x^2 - (a+1)x + (a+4) = 0$  não admite raízes reais.

$$\text{Devemos ter, então } \Delta = a^2 + 2a + 1 - 4a - 16 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - 15 < 0 \Leftrightarrow -3 < a < 5$$

**Observação:** Para  $a = 5$ , a equação

$$(3-x) \cdot [x^2 - (1+a)x + (a+4)] = 0 \text{ transforma-se em}$$

$$(3-x)(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow (3-x)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Assim sendo, para  $a = 5$ , a equação  $p(x) = 0$  **terá também uma única raiz real**, de multiplicidade 3.

**Respostas:** a) 3;  $1 - 2i$ ;  $1 + 2i$

$$b) \{a \in \mathbb{R} \mid -3 < a < 5\}$$

**12**

Considere a função quadrática  $f(x) = x^2 + x \cos \alpha + \sin \alpha$ .

- a) Resolva a equação  $f(x) = 0$  para  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ .  
 b) Encontre os valores de  $\alpha$  para os quais o número complexo  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  é raiz da equação  $f(x) + 1 = 0$ .

### Resolução

$$a) \alpha = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(x) = x^2 + x \cdot \cos \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Leftrightarrow V = \{-1; 1\}$$

$$b) \text{ Se } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ é raiz da equação } f(x) + 1 = 0, \text{ cujos}$$

$$\text{coeficientes são reais, então } \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ também}$$

é raiz.

Aplicando as relações de Girard, na equação de 2º grau, temos:

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\cos \alpha \\ \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \sin \alpha + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = -1 \\ \sin \alpha + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pi + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

**Respostas:** a)  $V = \{-1; 1\}$

$$b) \alpha = \pi + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$