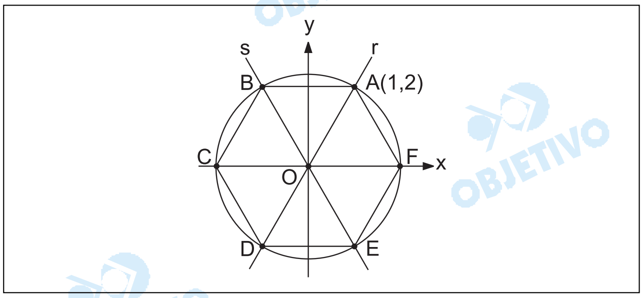
20

A figura representa, em um sistema ortogonal de coordenadas, duas retas, r e s, simétricas em relação ao eixo Oy, uma circunferência com centro na origem do sistema, e os pontos A = (1, 2), B, C, D, E e F, correspondentes às interseções das retas e do eixo Ox com a circunferência.

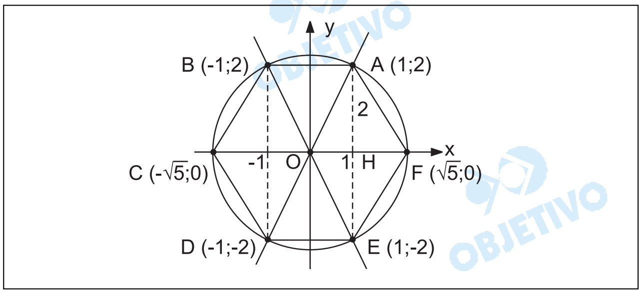


Nestas condições, determine

a) as coordenadas dos vértices B, C, D, E e F e a área do hexágono ABCDEF.

b) o valor do cosseno do ângulo AÔB.

Resolução



1) *O ponto B é simétrico de A em relação ao eixo Oy. Os pontos D e E são, respectivamente, simétricos de A e B em relação à origem. Os pontos C e F pertencem à circunferência e ao eixo Ox.*

2) *O raio R = OA, da circunferência, é tal que* $R = OA = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5} = OF$

3) *Desta forma, os pontos B, C, D, E e F têm coordenadas, respectivamente, iguais a* $(-1; 2)$, $(-\sqrt{5}; 0)$, $(-1; -2)$, $(1; -2)$ *e* $(\sqrt{5}; 0)$.

4) *Os triângulos OFA, OBC, OCD e OEF têm áreas iguais a* $S_1 = \dfrac{OF \,.\, AH}{2} = \dfrac{\sqrt{5} \,.\, 2}{2} = \sqrt{5}$

5) *Os triângulos OAB e ODE têm áreas iguais a* $S_2 = \dfrac{AB \,.\, AH}{2} = \dfrac{2 \,.\, 2}{2} = 2$

6) *A área do hexágono ABCDEF é*

$S = 4\,S_1 + 2S_2 = 4 \,.\, \sqrt{5} + 2 \,.\, 2 = 4(\sqrt{5} + 1)$ *u.a.*

7) $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos(\hat{AOB}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot (\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{5}) \cdot \cos(\hat{AOB}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 \cos(\hat{AOB}) = 6 \Leftrightarrow \cos(\hat{AOB}) = 0{,}6$

Respostas: *a)* $B(-1; 2)$, $C(-\sqrt{5}; 0)$, $D(-1; -2)$,

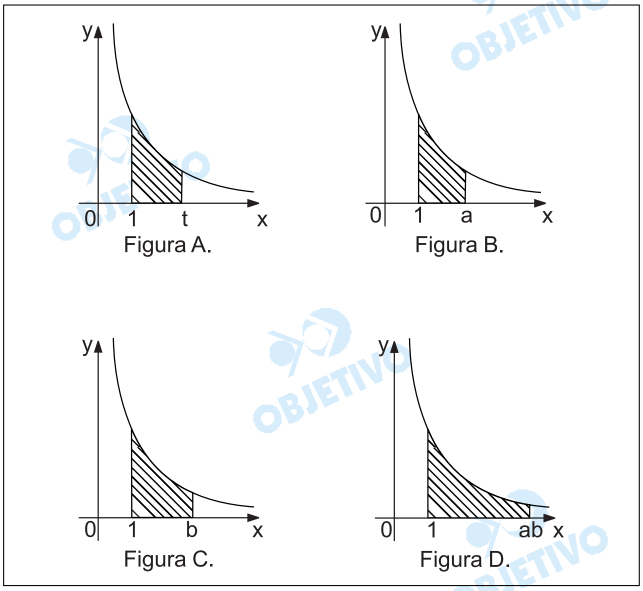
$E(1; -2)$ e $F(\sqrt{5}; 0)$

$S = 4(\sqrt{5} + 1)$ u.a.

b) $\cos(\hat{AOB}) = 0{,}6$

21

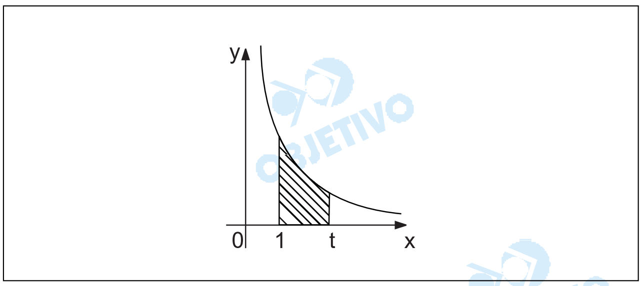
A área da região hachurada na figura A vale $\log_{10}t$, para $t > 1$.



a) Encontre o valor de t para que a área seja 2.

b) Demonstre que a soma das áreas das regiões hachuradas na figura B (onde t = a) e na figura C (onde t = b) é igual à área da região hachurada na figura D (onde t = ab).

Resolução



A área da região hachurada na figura A vale $\log_{10}t$*, com* $t > 1$

a) $\log_{10}t = 2 \Leftrightarrow t = 100$

b) Se S_B, S_C *e* S_D *forem, respectivamente, as áreas hachuradas das figuras B, C e D, então:*

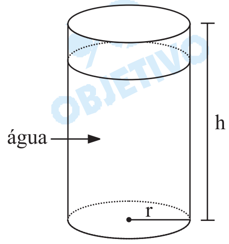
$S_B + S_C = \log_{10}a + \log_{10}b = \log_{10}(a \cdot b) = S_D \Rightarrow$

$\Rightarrow S_B + S_C = S_D$

Respostas: *a) t = 100* *b) Demonstração*

22

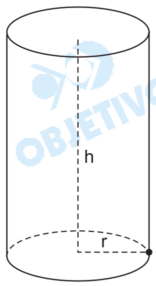
Um recipiente, contendo água, tem a forma de um cilindro circular reto de altura h = 50 cm e raio r = 15 cm. Este recipiente contém 1 litro de água a menos que sua capacidade total.



a) Calcule o volume de água contido no cilindro (use $\pi = 3{,}14$).

b) Qual deve ser o raio R de uma esfera de ferro que, introduzida no cilindro e totalmente submersa, faça transbordar exatamente 2 litros de água?

Resolução



O volume do cilindro de raio r = 1,5dm e altura h = 5dm é

$$\pi \cdot (1{,}5)^2 \cdot 5\ dm^3 = 35{,}325\ell$$

a) O volume de água contida no cilindro é
$35{,}325\ell - 1\ell = 34{,}325\ell$

b) Para transbordar exatamente 2 litros de água, o volume da esfera de raio R deve ser 3 litros.

Logo: $\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = 3 \Leftrightarrow R^3 = \dfrac{9}{4\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{9}{4\pi}}$

Respostas: *a)* $34{,}325\ell$ *b)* $\sqrt[3]{\dfrac{9}{4\pi}}$ *dm*

23

Um jovem e uma jovem iniciam sua caminhada diária, em uma pista circular, partindo simultaneamente de um ponto P dessa pista, percorrendo-a em sentidos opostos.

a) Sabendo-se que ela completa uma volta em 18 minutos e ele em 12 minutos, quantas vezes o casal se encontra no ponto P, após a partida, numa caminhada de duas horas?

b) Esboce o gráfico da função f(x) que representa o número de encontros do casal no ponto P, após a partida, numa caminhada de duas horas, com ele mantendo a velocidade correspondente a 12 minutos por volta e ela de x minutos por volta. Assuma que x é um número natural e varia no intervalo [18, 25].

Resolução

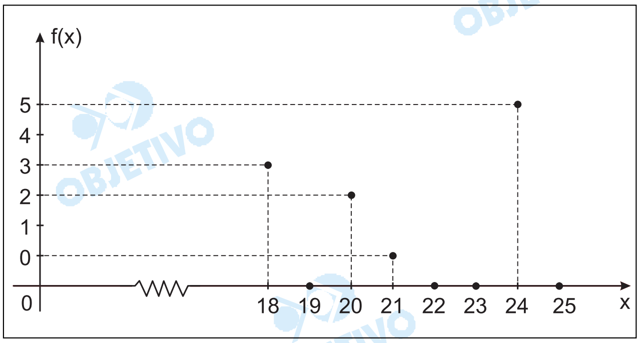
a) *O jovem localiza-se no ponto P nos instantes, em minutos, múltiplos de 12 e a jovem nos instantes múltiplos de 18. O casal encontra-se no ponto P, após a partida, nos instantes múltiplos naturais e não-nulos do mmc(12;18) = 36. No intervalo de 2 horas (120 minutos), o casal encontra-se no ponto P no instantes 36, 72 e 108, portanto, três vezes.*

b) *A função que representa o número de encontros do casal no ponto P, após a partida, numa caminhada de duas horas, é*

$f(x) = Int\left[\dfrac{120}{mmc(12;\,x)}\right]$, *em que Int(a) é o maior inteiro que não supera* ***a****, ou seja, parte inteira de* ***a****. Assim, tem-se:*

Para x igual a	*mmc(12;x)*	*f(x)*
18	*36*	$Int\left(\dfrac{120}{36}\right) = 3$
19	*228*	$Int\left(\dfrac{120}{228}\right) = 0$
20	*60*	$Int\left(\dfrac{120}{60}\right) = 2$
21	*84*	$Int\left(\dfrac{120}{84}\right) = 1$
22	*132*	$Int\left(\dfrac{120}{132}\right) = 0$
23	*276*	$Int\left(\dfrac{120}{276}\right) = 0$
24	*24*	$Int\left(\dfrac{120}{24}\right) = 5$
25	*300*	$Int\left(\dfrac{120}{300}\right) = 0$

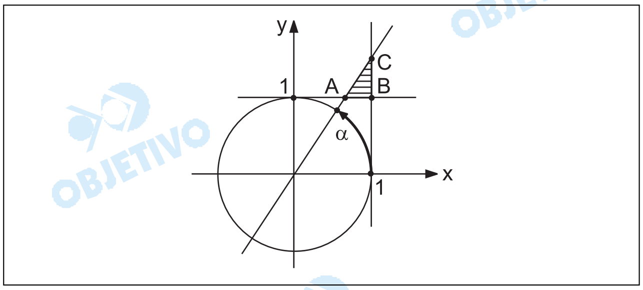
O gráfico da função f(x) é:



Respostas: *a) 3 vezes   b) gráfico*

24

Com base na figura, que representa o círculo trigonométrico e os eixos da tangente e da cotangente,



a) calcule a área do triângulo ABC, para $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

b) determine a área do triângulo ABC, em função de α,

$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Resolução

Com base na figura, para $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, *temos que* $\cot g\ \alpha + AB = 1$ *e* $tg\ \alpha - BC = 1$ *e, portanto,*

$AB = 1 - \cot g\ \alpha$ *e* $BC = tg\ \alpha - 1$.

Assim sendo, a área do triângulo ABC é

$$\frac{AB \, . \, BC}{2} = \frac{1}{2} \, . \, (1 - \cot g\ \alpha)\,(tg\ \alpha - 1)$$

Para $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, *a área do triângulo ABC é*

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)(\sqrt{3} - 1) = \frac{4\sqrt{3} - 6}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

Respostas: *a)* $\dfrac{2\sqrt{3}}{3} - 1$

b) $\dfrac{1}{2} \, . \, (1 - \cot g\ \alpha)\,(tg\ \alpha - 1)$

25

Um determinado produto é vendido em embalagens fechadas de 30 g e 50 g. Na embalagem de 30 g, o produto é comercializado a R$ 10,00 e na embalagem de 50 g, a R$ 15,00.

a) Gastando R$ 100,00, qual é a quantidade de cada tipo de embalagem para uma pessoa adquirir precisamente 310 g desse produto?

b) Qual é a quantidade máxima, em gramas, que uma pessoa pode adquirir com R$ 100,00?

Resolução

*Sejam **t** e **c**, respectivamente, as quantidades de embalagens de 30 g e 50 g.*

a) $\begin{cases} 30t + 50c = 310 \\ 10t + 15c = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30t + 50c = 310 \\ 5c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ t = 7 \end{cases}$

b) A embalagem de 50 g é mais econômica, pois o preço por grama é, em reais, é $\dfrac{15}{50} = 0{,}3$ *e* $\dfrac{15}{50} < \dfrac{10}{30}$. *Deve-se adquirir, portanto, a máxima quantidade de embalagens de 50 g.*

Notando que R$ 100,0 = 6 . R$ 15,00 + 1 . R$ 10,00, concluímos que a quantidade máxima, em gramas, que uma pessoa pode adquirir com R$ 100,00 é 6 . 50 g + 1 . 30 g = 330 g.

$$\begin{array}{r|l} 100 & 15 \\ \hline 10 & 6 \end{array}$$

Respostas: *a) 7 embalagens de 30 g e 2 de 50 g*

b) 330 g

Comentário

Seis questões originais compuseram a prova de Matemática do vestibular 2003 da Unifesp, que se caracterizou por ter um bom nível e exigir do vestibulando um esforço maior de raciocínio.