1ª QUESTÃO

Numa cidade do interior do estado de São Paulo, uma prévia eleitoral entre 2.000 filiados revelou as seguintes informações a respeito de três candidatos **A**, **B**, e **C**, do Partido da Esperança (**PE**) que concorrem a 3 cargos diferentes:

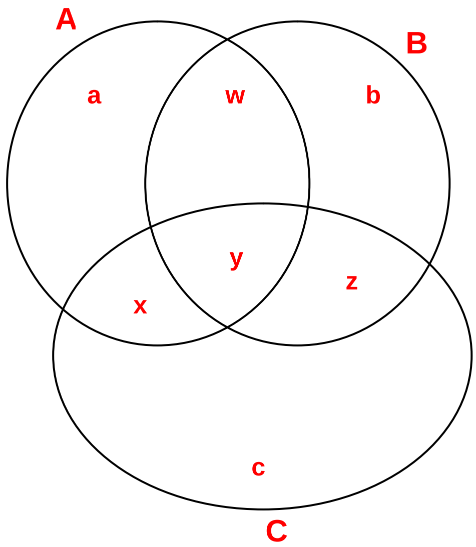
I. todos os filiados votaram e não houve registro de voto em branco, tampouco de voto nulo;
II. 280 filiados votaram a favor de **A** e de **B**;
III. 980 filiados votaram a favor de **A** ou de **B**, mas não de **C**;
IV. 420 filiados votaram a favor de **B**, mas não de **A** ou de **C**;
V. 1.220 filiados votaram a favor de **B** ou de **C**, mas não de **A**;
VI. 640 filiados votaram a favor de **C**, mas não de **A** ou de **B**;
VII. 140 filiados votaram a favor de **A** e de **C**, mas não de **B**.

Determine o número de filiados ao **PE** que:

(a) votaram a favor dos 3 candidatos.

(b) votaram a favor de apenas um dos candidatos.

RESOLUÇÃO



$$II.\ n(A\cap B) = 280 \Rightarrow y + w = 280 \quad (1)$$

$$III.\ n\left[(A\cup B)\cap \overline{C}\right] = 980 \Rightarrow a + w + b = 980 \quad (2)$$

$$IV.\ n\left[B\cap\left(\overline{A\cup C}\right)\right] = 420 \Rightarrow b = 420 \quad (3)$$

$$V.\ n\left[(B\cup C)\cap \overline{A}\right] = 1220 \Rightarrow b + c + z = 1220 \quad (4)$$

$$VI.\ n\left[C\cap\left(\overline{A\cup B}\right)\right] = 640 \Rightarrow c = 640 \quad (5)$$

$$VII.\ n\left[A\cap C\cap \overline{B}\right] = 140 \Rightarrow x = 140 \quad (6)$$

$$(3)\ e\ (5)\ em\ (4) \rightarrow 420 + 640 + z = 1220 \Rightarrow z = 160 \ (7)$$

$$(3)\ em\ (2) \rightarrow a + w + 420 = 980 \Rightarrow a + w = 560 \ (8)$$

$$I.\ 640 + 160 + 140 + 420 + a + y + w = 2000 \Rightarrow a + y + w = 640 \ (9)$$

$$(8)\ em\ (9) \rightarrow y = 640 - 560 \Rightarrow y = 80$$

$$(1) \rightarrow 80 + w = 280 \Rightarrow w = 200\ ;\ (8) \rightarrow a + 200 = 560 \Rightarrow a = 360$$

(a) ***80 FILIADOS AO PE VOTARAM NOS 3 CANDIDATOS.***

(b) ***360 + 420 + 640 = 1.420 FILIADOS VOTARAM EM APENAS UM DOS CANDIDATOS.***

2ª QUESTÃO

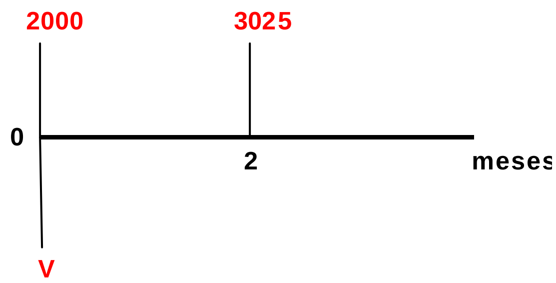
O *"Magazine Lucia"* e a rede *"Corcovado"* de hipermercados vendem uma determinada marca de aparelho de som do tipo *Home Cinema*, pelo mesmo preço à vista. Na venda a prazo, ambas as lojas cobram a taxa de juros compostos de 10% ao mês, com planos de pagamentos distintos.

Comprando a prazo no *"Magazine Lucia"*, um consumidor deve pagar R$2.000,00 no ato da compra e R$3.025,00 depois de 2 meses, enquanto que na rede *"Corcovado"* ele pode levar o aparelho sem desembolsar dinheiro algum, pagando uma parcela de R$1.980,00, 1 mês após a compra e o saldo em 2 meses após a compra.

(a) Qual o valor à vista do aparelho de som?

(b) Se um consumidor comprar o aparelho de som a prazo na rede *"Corcovado"*, qual o valor da parcela final, vencível 2 meses após a compra?

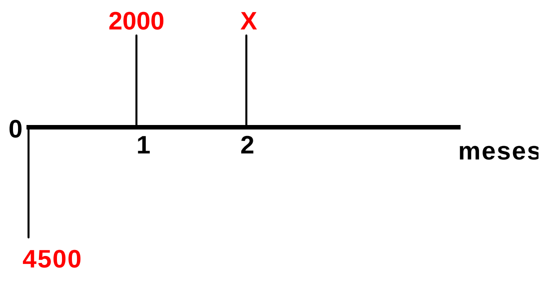
RESOLUÇÃO



(a) $$V = 2000 + \frac{3025}{(1{,}1)^2} = 2000 + \frac{3025}{1{,}21} = 2000 + \frac{5^2.11^2.10^2}{11^2}$$

$$V = 2000 + 2500 = 4500$$

O VALOR DO APARELHO DE SOM, À VISTA, EM AMBAS AS LOJAS É R$ 4.500,00.



(b) $$4500 = \frac{1980}{1{,}1} + \frac{X}{(1{,}1)^2} \Rightarrow 4500 - 1800 = \frac{X}{1{,}21}$$

$$X = (2700).(1{,}21) \Rightarrow X = 3267$$

O VALOR DA PARCELA FINAL NO "CORCOVADO" É R$ 3.267,00

3ª QUESTÃO

(a) Os enxadristas Dráuzio e João jogam 12 partidas de xadrez, das quais 6 são vencidas por Dráuzio, 4 por João e 2 terminam empatadas. Os jogadores combinam a disputa de um torneio com 3 partidas.

Determine a probabilidade de 2 das 3 partidas do torneio terminarem empatadas.

RESOLUÇÃO

Probabilidade de Dráuzio vencer: $P(D) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Probabilidade de João vencer: $P(J) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Probabilidade de ocorrer empate: $P(E) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

PROBABILIDADE DE OCORRER EMPATE EM DUAS DAS 3 PARTIDAS DO TORNEIO:

$$\left(C_{3,2}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{6}$$

$$\boxed{= \frac{5}{72}}$$

(b) O Conselho Diretor de uma empresa é composto por **n** diretores, além do Presidente. Com os membros do Conselho Diretor podem ser formadas **C** comissões de 4 elementos, todas contando com a participação do Presidente. Se, no entanto, a presença do Presidente não for obrigatória, podendo participar ou não, **2C** comissões poderão ser formadas.

Determine o número de membros do Conselho Diretor.

RESOLUÇÃO

$$\left.\begin{array}{l} C_{n,3} = C \\ C_{(n+1),4} = 2C \end{array}\right\} \Rightarrow 2\,\frac{n!}{3!\,(n-3)!} = \frac{(n+1)!}{4!\,(n-3)!}$$

$$2 = \frac{n+1}{4} \Rightarrow n = 7$$

O CONSELHO DIRETOR DESTA EMPRESA É COMPOSTO POR 8 MEMBROS: PRESIDENTE E 7 DIRETORES.

4ª QUESTÃO

(a) Determine os valores de **a** para os quais o sistema linear abaixo admita solução não trivial.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ (\text{sen}\,\alpha)x + (\cos\alpha)y = 0 \\ (\cos\alpha)x + (\text{sen}\,\alpha)z = 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 0 & \text{sen}\alpha \end{vmatrix} = 2\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha - \left(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha\right)$$

Para que o sistema admita solução não trivial: ***D = 0***

$$\text{sen}(2\alpha) = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi \; ; \; k \in Z}$$

(b) Resolva a equação $x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = 0$ no conjunto dos números complexos.

RESOLUÇÃO

$$\text{Seja } P(x) = x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = 0 \; ; \; P(-1) = 0$$

–1	1	1	4	4	3	3
	1	0	4	0	3	0

$$P(x) = (x+1).(x^4 + 4x^2 + 3) = (x+1).(x^2+1).(x^2+3)$$

$$P(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i \\ x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = \pm i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{ -1 \, , \pm i \; ; \pm i\sqrt{3} \right\}}$$

5ª QUESTÃO

Considere as funções: $f(x) = 3^x - 3$ e $g(x) = \log_3(x+1)$, sendo $\log_a(b)$ o logaritmo de ***b*** na base ***a***.

(a) Esboce a representação gráfica das funções ***f(x)*** e ***g(x)*** num mesmo sistema cartesiano de eixos.

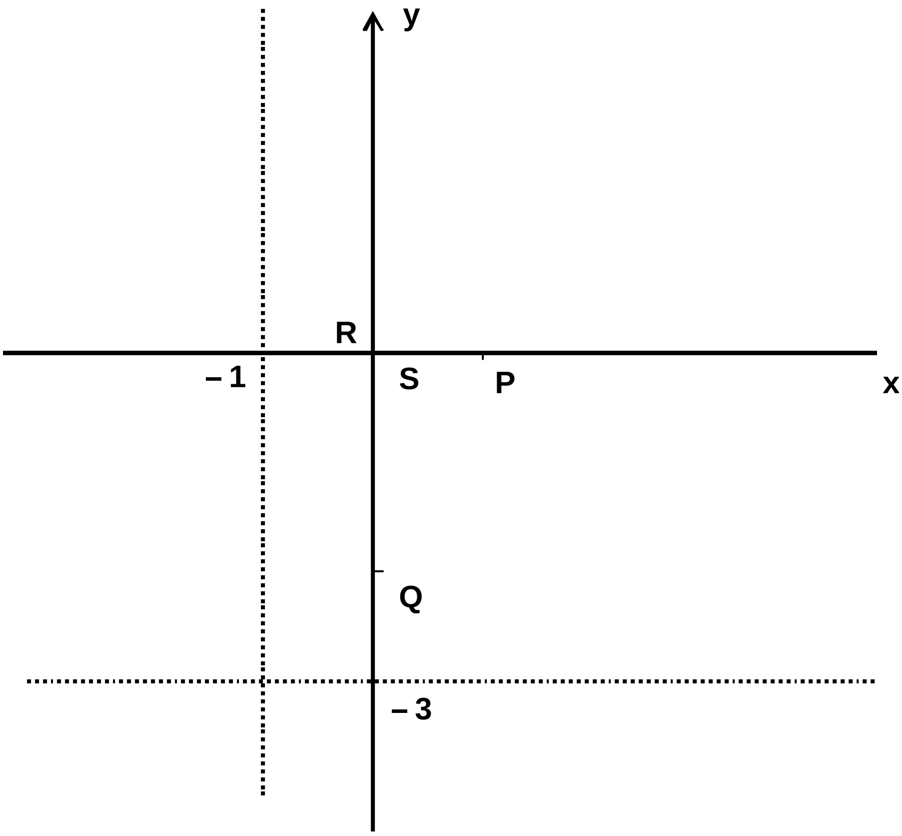
(b) Escreva a equação das retas ***r*** e ***s***, assíntotas das funções ***f(x)*** e ***g(x)***, respectivamente.

(c) Determine as coordenadas dos pontos ***P*** e ***R***, intersecções das funções ***f(x)*** e ***g(x)***, respectivamente, com o eixo ***Ox*** e as coordenadas dos pontos ***Q*** e ***S***, intersecções das funções ***f(x)*** e ***g(x)***, respectivamente, com o eixo ***Oy***.

(d) Determine graficamente o número de soluções da equação ***f(x) = g(x)***.

RESOLUÇÃO

(a)



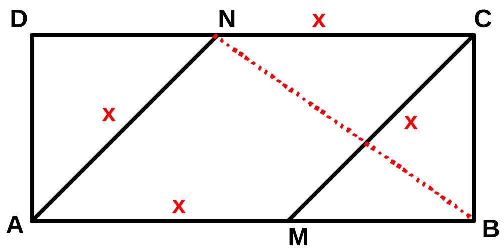
(b) r : y = – 3 ; s: x = – 1

(c) P (1, 0) ; Q (0, – 2) ; R = S (0, 0)

(d) A equação admite 2 soluções, assinaladas no gráfico pelos pontos **T** e **V**.

6ª QUESTÃO

(a) Na figura ao lado, ***ABCD*** é um retângulo e ***AMCN*** é um losango.
Determine a medida do segmento ***NB***, sabendo que ***AB = 2AD = 20cm***.



RESOLUÇÃO

$$AB = DC = 20 \; ; \; AD = BC = 10$$

$$AM = MC = CN = NA = x \Rightarrow DN = 20 - x$$

$$\Delta ADN \rightarrow x^2 = 10^2 + (20 - x)^2 \Rightarrow x^2 = 100 + 400 - 40x + x^2$$

$$40x = 500 \Rightarrow x = \frac{25}{2}$$

$$\Delta NBC \rightarrow x^2 + 10^2 = (NB)^2 \Rightarrow (NB)^2 = \frac{1025}{4}$$

$$\boxed{NB = \frac{5\sqrt{41}}{2}\,cm}$$

(b) Considere dois polinômios, ***f(x)*** e ***g(x)***, tais que o grau de ***f(x)*** é ***n + 2*** e o grau de ***g(x)*** é ***n – 1***.
Sejam ***q(x)*** e ***r(x)*** $(r(x) \neq 0)$, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de ***f(x)*** por ***g(x)***.
O que se pode afirmar a respeito dos graus dos polinômios ***q(x)*** e ***r(x)***?

RESOLUÇÃO

$$\partial f = \partial g + \partial q \Rightarrow \partial q = (n + 2) - (n - 1) \Rightarrow$$

$$\boxed{\partial q = 3}$$

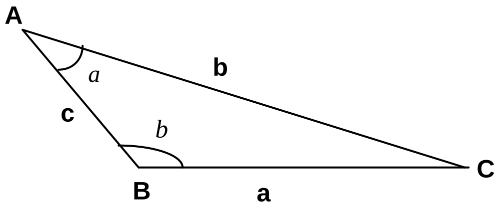
$$\partial r < \partial g \Rightarrow \quad \boxed{\partial r < n - 1}$$

7ª QUESTÃO

(a) No triângulo ***ABC*** da figura ao lado, sabe-se que:

$$a = \frac{7}{3}c \; ; \; \operatorname{sen}\beta = \frac{4\sqrt{3}}{7} \; ; \; 90^o < \beta < 180^o .$$

Determine o valor do ângulo α .



RESOLUÇÃO

$$\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \cos^2\beta = 1 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} \Rightarrow \cos\beta = -\frac{1}{7}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$b^2 = \frac{49}{9}c^2 + c^2 - \frac{14}{3}c^2.\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{64}{9}c^2 \Rightarrow b = \frac{8}{3}c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\frac{49}{9}c^2 = \left(\frac{64}{9} + 1\right)c^2 - \frac{16}{3}c^2\cos\alpha \Rightarrow \left(\frac{49}{9} - \frac{73}{9}\right)c^2 = -\frac{16}{3}c^2\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{24}{9}.\frac{3}{16} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = 60^o}$$

(b) Escreva a equação da bissetriz do maior ângulo formado pelas retas $y = 3$ e $y = 2 - x\sqrt{3}$.

$\theta =$ ***coef. ang. da reta dada***

$tg\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 120^o$

$t \to$ ***bissetriz do maior ângulo***

$\frac{\theta}{2} = 60^o \to$ ***coef.ang.da reta t***

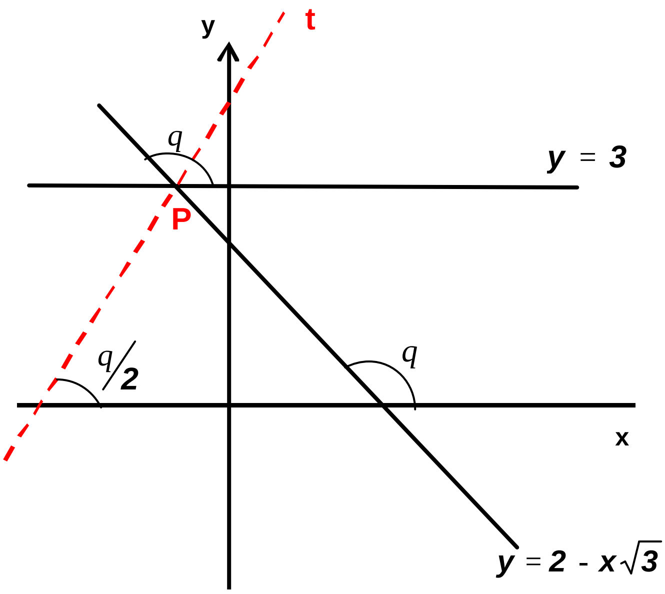
$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = tg\,60^o = \sqrt{3}$

$P \to$ ***intersecção das retas dadas***

$$3 = 2 - x\sqrt{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 3\right)$$

$$y - 3 = \sqrt{3}\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



$$\boxed{t \to y = x\sqrt{3} + 4}$$

8ª QUESTÃO

Benedito, um motorista de táxi que percorre 5.040 km por mês, analisa a hipótese de adquirir um veículo equipado com tecnologia *flex fuel*, bicombustível.

No folheto de propaganda a montadora explica que o veículo bicombustível tanto pode usar álcool como gasolina, em qualquer proporção, apresentando a seguinte tabela de consumo, de acordo com as proporções de combustíveis utilizadas:

Combustível		Consumo
Álcool	Gasolina	(Km por litro)
–	100%	18
40%	60%	16
60%	40%	15
70%	30%	14
100%	–	10

(a) Considerando que atualmente a gasolina custa R$2,00 por litro e que o preço do litro de álcool é 45% do preço do litro de gasolina, que proporção de combustíveis Benedito deveria utilizar no veículo equipado com tecnologia *flex fuel*, para que tivesse o menor gasto mensal possível?

(b) Para comprar o carro bicombustível, Benedito despenderá R$3.000,00 a mais do que gastaria se adquirisse o mesmo modelo com motor movido a gasolina, que faz 18 km por litro. Nas duas hipóteses, o seu carro atual entrará como parte do pagamento.
O nosso motorista está em dúvida, pois se comprar o carro a gasolina poderá aplicar os R$3.000,00 em um fundo de investimento que garante um rendimento de 30% de juros no período de 3 anos.
Supondo que os preços dos combustíveis mantenham-se nos níveis atuais nos próximos 3 anos, qual a aquisição que proporcionará maior ganho a Benedito?

RESOLUÇÃO

Combustível		Consumo	Consumo	Em litros	Gasto
Álcool	Gasolina	(Km por litro)	mensal	de gasolina	mensal
–	100%	18	280 litros	280	R$560,00
40%	60%	16	315 litros	245,70	R$491,40
60%	40%	15	336 litros	225,12	R$450,24
70%	**30%**	**14**	**360 litros**	**221,40**	**R$442,80**
100%	–	10	504 litros	226,80	R$453,60

(a) ***DA TABELA ACIMA SE CONCLUI QUE PARA O MENOR GASTO MENSAL POSSÍVEL, O VEÍCULO BICOMBUSTÍVEL DEVERIA SER ABASTECIDO COM 70% DE ÁLCOOL E 30% DE GASOLINA.***

(b)
$$3000.(1,3) = 3.900,00$$
$$(560 - 442,80).36 = (117,20).36 = 4.219,20$$

BENEDITO DEVERIA OPTAR PELA COMPRA DO VEÍCULO EQUIPADO COM TECNOLOGIA FLEX FUEL.

9ª QUESTÃO

A e ***B*** são subconjuntos do conjunto dos números reais (***R***), definidos por:

$$A = \{ x \in R \,|\, 2x + 1 = |x+1| - |x| \} \;\; ; \;\; B = \{ x \in R \,|\, 2 \leq \big| |x+1| - 2 \big| \}$$

Determine o intervalo real que representa $\bar{A} \cap \bar{B}$, sendo $\bar{A}$ e $\bar{B}$ os complementares de ***A*** e ***B***, respectivamente, em relação a ***R***.

RESOLUÇÃO

$$|x+1| = \left\{ \begin{array}{l} -x-1 \text{ se } x < -1 \\ \text{ou} \\ x+1 \text{ se } x \geq -1 \end{array} \right. \quad ; \quad |x| = \left\{ \begin{array}{l} -x \text{ se } x < 0 \\ \text{ou} \\ x \text{ se } x \geq 0 \end{array} \right.$$

$$|x+1| - |x| = 2x+1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 = 2x+1 \text{ se } x < -1, \text{ ou} \\ 2x+1 = 2x+1 \text{ se } -1 \leq x < 0, \text{ ou} \\ 1 = 2x+1 \text{ se } x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{A = [-1, 0]}$$

$$B: \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |-x-3| \geq 2 \text{ se } x < -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x-3 \leq -2, \text{ ou} \\ -x-3 \geq 2 \end{array} \right\rangle \Rightarrow x \leq -5 \\ \text{ou} \\ |x-1| \geq 2 \text{ se } x \geq -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-1 \leq -2, \text{ ou} \\ x-1 \geq 2 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \text{ ou} \\ x \geq 3 \end{array} \right. \end{array} \right\rangle \Rightarrow$$

$$\boxed{B = \,]-\infty, -5] \cup \{-1\} \cup [3, +\infty[}$$

$$\boxed{A \cup B = \,]-\infty, -5] \cup [-1, 0] \cup [3, +\infty[}$$

$$\boxed{\bar{A} \cap \bar{B} = (\overline{A \cup B}) = \,]-5, -1[\,\cup\,]0, 3[\,= \{ x \in R \,|\, -5 < x < -1 \text{ ou } 0 < x < 3 \}}$$

10ª QUESTÃO

Uma certa mercadoria foi promovida por uma substancial campanha de propaganda e, pouco antes de encerrar a promoção, a quantidade diária de vendas era 10.000 unidades.

Imediatamente após, as vendas diárias decresceram a uma taxa proporcional às vendas diárias, tal que: $V(t) = B.e^{k.t}$, sendo ***B*** o número de unidades vendidas em um determinado dia; ***V(t)*** a quantidade de vendas por dia, após ***t*** dias; ***e*** = 2,72 e ***k*** um número real.

Sabe-se que 10 dias após encerrar a promoção o volume diário de vendas era 8.000 unidades.

(a) Qual o volume diário de vendas 30 dias após o encerramento da promoção?

(b) Quando se espera que a venda diária seja reduzida a 6.400 unidades?

Considere que $\log 2 = \frac{3}{10}$, *sendo* $\log 2$ *o logaritmo de 2 na base 10.*

RESOLUÇÃO

$$V(0) = 10000 \Rightarrow B.e^{0} = 10000 \Rightarrow B = 10000$$

$$V(10) = 8000 \Rightarrow (10000).e^{10k} = 8000 \Rightarrow \qquad \boxed{e^{k} = \left(\frac{4}{5}\right)^{0,1}}$$

(a)

$$V(30) = (10000).\left(e^{k}\right)^{30} = (10000).\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{0,1}\right]^{30} = (10000).\left(\frac{4}{5}\right)^{3}$$

$$V(30) = \frac{10^{4}.\,4^{3}}{5^{3}} = \frac{5^{4}.\,2^{4}.\,2^{6}}{5^{3}} = 5.2^{10} \Rightarrow \boxed{V(30) = 5120}$$

O VOLUME DIÁRIO DE VENDAS, 30 DIAS APÓS O ENCERRAMENTO DA PROMOÇÃO, SERÁ DE 5.120 UNIDADES.

$$V(t) = 6400 \Rightarrow (10000).\left(\frac{4}{5}\right)^{0,1t} = 6400 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{0,1t} = \frac{64}{100}$$

(b)

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}1t = \frac{\log\left(\frac{2^{6}}{10^{2}}\right)}{\log\left(\frac{2^{2}}{5}\right)} = \frac{6.\log 2 - 2}{2.\log 2 - \log 5} = \frac{6.\log 2 - 2}{2.\log 2 - (\log 10 - \log 2)}$$

$$0{,}1t = \frac{6.(0{,}3) - 2}{3.(0{,}3) - 1} = \frac{-0{,}2}{-0{,}1} \Rightarrow 0{,}1t = 2 \Rightarrow \boxed{t = 20}$$

ESPERA-SE QUE A VENDA DIÁRIA SEJA REDUZIDA A 6.400 UNIDADES, 20 DIAS APÓS O ENCERRAMENTO DA PROMOÇÃO.