MATEMÁTICA

1 e

O Sr. Paiva é proprietário de duas papelarias, A e B. Em 2002 o faturamento da unidade A foi 50% superior ao da unidade B. Em 2003, o faturamento de A aumentou 20% em relação ao seu faturamento no ano anterior e o faturamento de B aumentou 10% em relação ao seu faturamento no ano anterior.
Podemos afirmar que, em 2003, o faturamento de A em relação ao faturamento de B foi superior em aproximadamente:

a) 70% b) 68% c) 66% d) 60% e) 64%

Resolução

Sendo a_1 e b_1 os faturamentos das unidades A e B, em 2002, e a_2 e b_2 os faturamentos das mesmas unidades, em 2003, tem-se:

$$\begin{cases} a_1 = 1,50 \, . \, b_1 \\ a_2 = 1,20 \, . \, a_1 \\ b_2 = 1,10 \, . \, b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{b_1} = 1,50 \\ \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{1,20}{1,10} \, . \, \dfrac{a_1}{b_1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_2}{b_2} = \frac{1,20}{1,10} \, . \, 1,50 \Rightarrow a_2 \cong 1,64 \, . \, b_2.$$

Desta forma, em 2003 o faturamento de A foi aproximadamente 64% superior ao faturamento da unidade B.

2 b

Considerando os valores log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, o valor de x que satisfaz a equação $36^x = 24$, é:

a) $\dfrac{49}{78}$ b) $\dfrac{69}{78}$ c) $\dfrac{59}{78}$

d) $\dfrac{64}{78}$ e) $\dfrac{54}{78}$

Resolução

$36^x = 24 \Leftrightarrow x = \log_{36} 24 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log (2^3 \, . \, 3)}{\log (2^2 \, . \, 3^2)} = \frac{3 \, . \, \log 2 + \log 3}{2 \, . \, \log 2 + 2 \, . \, \log 3} =$$

$$= \frac{3 \, . \, 0,30 + 0,48}{2 \, . \, 0,30 + 2 \, . \, 0,48} \Leftrightarrow x = \frac{69}{78}$$

3 e

Quando uma empresa cobra p reais por unidade de um produto fabricado, ela vende x unidades por mês. Sabe-se que p relaciona-se com x mediante a equação $x = 100 - 0{,}5p$. Para que a receita mensal de venda desse produto seja R$ 4.800,00, o preço cobrado, por unidade, pode ser p_1 ou p_2 . A soma $p_1 + p_2$ vale:

a) R$ 160,00　　b) R$ 180,00　　c) R$ 240,00
d) R$ 220,00　　e) R$ 200,00

Resolução

Lembrando que a receita R é o produto do preço por unidade pelo número de unidades vendidas, tem-se:

$R = p \,.\, x = p \,.\, (100 - 0{,}5p) = 4800 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100p - 0{,}5\,p^2 = 4800 \Leftrightarrow p^2 - 200p + 9600 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p_1 = 120$ *ou* $p_2 = 80.$

Assim sendo, em reais, a soma $p_1 + p_2$ *vale R\$ 200,00.*

4 c

No plano cartesiano, considere a reta de equação $2x - y = 5$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$. Podemos afirmar que:

a) A reta passa pelo centro da circunferência.
b) A reta é tangente à circunferência.
c) A circunferência intercepta o eixo y em dois pontos cuja distância é 2.
d) A circunferência intercepta o eixo x em dois pontos cuja distância é 1.
e) A área do círculo determinado pela circunferência é 4π.

Resolução

A circunferência de equação
$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ *tem centro C (1; 2) e raio* $r = \sqrt{1^2 + 2^2 - 3} = \sqrt{2}$.

1º) *Como a distância da reta* $2x - y = 5$ *ao centro C (1; 2)*

$$\text{é } d = \frac{|2 \,.\, 1 - 2 - 5|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \text{ que é}$$

maior que o raio, conclui-se que a reta não passa pelo centro da circunferência nem é tangente à circunferência.

2º) *A área do círculo determinado pela circunferência é:* $A = \pi \,.\, (\sqrt{2})^2 = 2\pi.$

3º) *A circunferência intercepta o eixo y em dois pontos, tais que* $y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ *ou* $y = 3$, *cuja distância é 2.*

4º) *A circunferência não intercepta o eixo x, pois a distância do centro C (1; 2) ao eixo x (d = 2) é maior que o raio* $(r = \sqrt{2})$.

5 a

Seja a seqüência (a_1, a_2, a_3, … a_n, …) tal que $a_n = \log 10^{n-1}$, em que $n \in N^*$.

O valor de $\sum\limits_{n=1}^{100} a_n$ é:

a) 4 950 b) 4 850 c) 5 050
d) 4 750 e) 4 650

Resolução

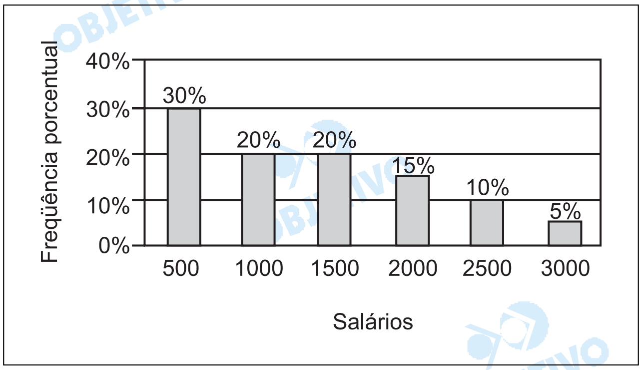
Sendo $a_n = \log 10^{n-1} \Leftrightarrow a_n = n - 1$, temos:

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) = (0; 1; 2; \dots; n - 1; \dots)$, que é uma progressão aritmética.

Logo, $\sum\limits_{n=1}^{100} a_n = \dfrac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \dfrac{(0 + 99) \cdot 100}{2} = 4950$

6 **C**

Numa cidade há 10.000 pessoas e cada uma recebe um único salário mensal. A distribuição de freqüências desses salários é dada pelo gráfico abaixo:



Podemos afirmar que os 5% que mais ganham, recebem:

a) 13,13% do total dos salários.
b) 12,12% do total dos salários.
c) 11,11% do total dos salários.
d) 14,14% do total dos salários.
e) 15,15% do total dos salários.

Resolução

O total dos salários recebidos pelas pessoas da cidade é, em unidades monetárias, igual a

$T = (30\% \cdot 500 + 20\% \cdot 1000 + 20\% \cdot 1500 +$

$+ 15\% \cdot 2000 + 10\% \cdot 2500 + 5\% \cdot 3000) \cdot 10000 \Leftrightarrow$

$T = (150 + 200 + 300 + 300 + 250 + 150) \cdot 10000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow T = 13\,500\,000$

O total dos salários recebidos pelos 5% que mais ganham é
$A = 5\%\ 10000 \cdot 3000 = 1\,500\,000.$

$$\text{Como } \frac{A}{T} = \frac{1\,500\,000}{13\,500\,000} = \frac{1}{9} \cong 0{,}1111 \Leftrightarrow$$

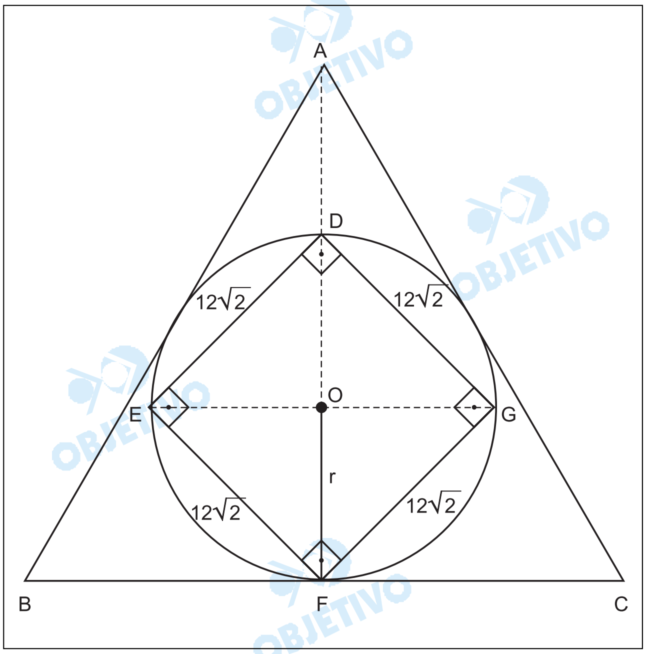
$\Leftrightarrow A = 11{,}11\%T$. *Os 5% que mais ganham recebem aproximadamente 11,11% do total dos salários.*

7 d

O lado de um quadrado inscrito num círculo mede $12\sqrt{2}$m ; a medida do lado do triângulo eqüilátero circunscrito vale:

a) $20\sqrt{3}$ m b) $20\sqrt{5}$ m c) $24\sqrt{5}$ m
d) $24\sqrt{3}$ m e) 40m

Resolução



Sendo r a medida do raio do círculo e ℓ a medida do lado do triângulo eqüilátero temos:

I) $DF = 2r \Leftrightarrow 12\sqrt{2}m.\sqrt{2} = 2r \Leftrightarrow r = 12m.$

II) $AF = 3r = 3 \,.\, 12m \Leftrightarrow AF = 36m$

III) $AF = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 36m = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AF = 24\sqrt{3}\,m.$

8 a

No regime de juros compostos, a taxa de juro anual que produz um montante 44% superior ao capital inicial, no prazo de aplicação de 2 anos é:

a) 20% b) 21,5% c) 21%
d) 20,5% e) 22%

Resolução

No regime de juros compostos, um capital C, aplicado a taxa de juros anual i, gera, no período de 2 anos, um montante $M = (1 + i)^2 \,.\, C$. Desta forma,
$(1 + i)^2 \,.\, C = 1{,}44C \Leftrightarrow 1 + i = 1{,}20 \Leftrightarrow i = 0{,}20 = 20\%$

9 e

No plano cartesiano, o ponto P que pertence à reta de equação y = x e é eqüidistante dos pontos A(–1,3) e B(5,7) tem abscissa igual a:

a) 3,1 b) 3,3 c) 3,4 d) 3,5 e) 3,2

Resolução

Se P pertence à reta de equação y = x, então P (x; x). Como P é eqüidistante dos pontos A e B, temos:

$PA = PB \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (x-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (x-7)^2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 3{,}2.$

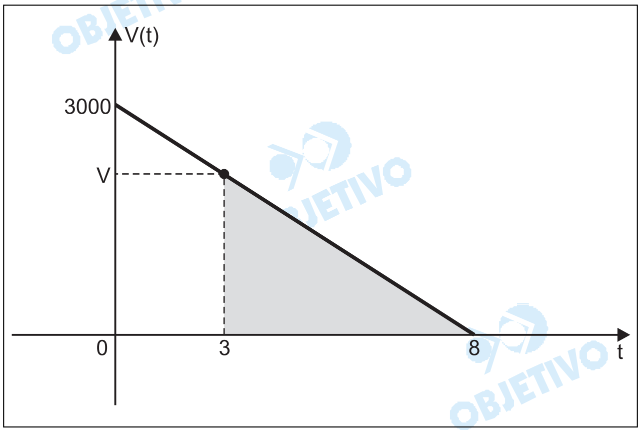
10 a

Atualmente, o valor de um computador novo é R$ 3.000,00. Sabendo que seu valor decresce linearmente com o tempo, de modo que daqui a 8 anos seu valor será zero, podemos afirmar que daqui a 3 anos (contados a partir de hoje) o valor do computador será:

a) R$ 1.875,00 b) R$ 1.800,00 c) R$ 1.825,00
d) R$ 1.850,00 e) R$ 1.900,00

Resolução

Se o valor de um computador novo é R$ 3 000,00 e seu valor decresce linearmente com o tempo, de modo que daqui a 8 anos seu valor será zero, podemos obter o seu valor em função do tempo, conforme o gráfico representado abaixo:



O valor do computador daqui a 3 anos será igual a V, tal que:

$$\frac{V}{3000} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow V = 1875, \text{ portanto R\$ } 1\,875{,}00.$$

11 d

De um grupo de 8 pessoas, entre elas Antônio e Benedito, deseja-se escolher uma comissão com 4 pessoas. O número de comissões que podem ser formadas nas quais Antônio participa e Benedito não, é igual a:

a) 15 b) 24 c) 30 d) 20 e) 36

Resolução

O número de comissões com 4 pessoas, nas quais Antônio participa e Benedito não, é igual a:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20.$$

12 d

Num escritório há 3 impressoras: A, B e C. Em um período de 1 hora:

- A e B juntas imprimem 150 folhas;
- A e C juntas imprimem 160 folhas;
- B e C juntas imprimem 170 folhas.

Em 1 hora, a impressora A imprime sozinha:

a) 60 folhas b) 65 folhas c) 75 folhas
d) 70 folhas e) 80 folhas

Resolução

Sendo a, b e c os números de folhas impressas em 1 hora pelas impressoras A, B e C, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a + b = 150 \\ a + c = 160 \Rightarrow 2a + 2b + 2c = 480 \Rightarrow a + b + c = 240 \\ b + c = 170 \end{cases}$$

Como $b + c = 170$, temos:

$a + b + c = 240 \Leftrightarrow a + 170 = 240 \Leftrightarrow a = 70$

13 a

Uma matriz X tem elementos cuja soma vale 1. Seja X^t a transposta da matriz X . Sabendo que

$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X^t = [1]$, podemos afirmar que o produto dos elementos de X vale:

a) 0 b) 0,25 c) 0,16 d) –2 e) –6

Resolução

Como X^t é a matriz transposta de X, para que a igualdade $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X^t = [1]$ se verifique é necessário que X seja de ordem 1 x 2.

Desta forma, se $X = [a \quad b]_{1x2}$, tem-se $a + b = 1$ (I).

$$[a \quad b] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [a - b \qquad -a + b] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [a^2 - ab - ab + b^2] = [1] \Leftrightarrow (a - b)^2 = 1 \text{ (II)}$$

Das equações (I) e (II), conclui-se que

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (a = 1 \text{ e } b = 0) \text{ ou}$$

$(a = 0$ e $b = 1)$.

Assim, o produtos dos elementos ***a*** *e* ***b*** *da matriz X é $a \cdot b = 0$*

14 **C**

Um produto (creme de leite) pode ser embalado em dois tipos de latas, A e B, ambas com formato de cilindro reto. Suas características são:

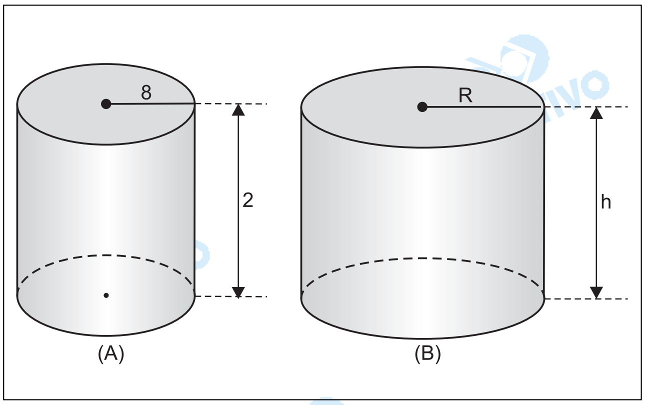
• Tipo A: raio da base 8cm e altura 2cm,

• Tipo B: altura igual ao diâmetro da base.

As duas latas devem ter o mesmo volume. Uma delas gasta de material na sua construção, x% a mais em relação à outra. O valor de x é aproximadamente igual a:

a) 33,4 b) 44,5 c) 66,7 d) 55,6 e) 77,8

Resolução



Sejam R e h as medidas, em centímetros, do raio da base e da altura do cilindro tipo B.

Do enunciado, tem-se: $h = 2R$ e $\pi R^2 h = \pi \cdot 8^2 \cdot 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow R^2 \cdot 2R = 128 \Leftrightarrow R^3 = 64 \Leftrightarrow R = 4$

Como $h = 2R$, *temos:*
$h = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow h = 8$

Sendo S_A *a área total do cilindro do tipo A e* S_B *a área total do cilindro do tipo B, em centímetros quadrados, temos:*

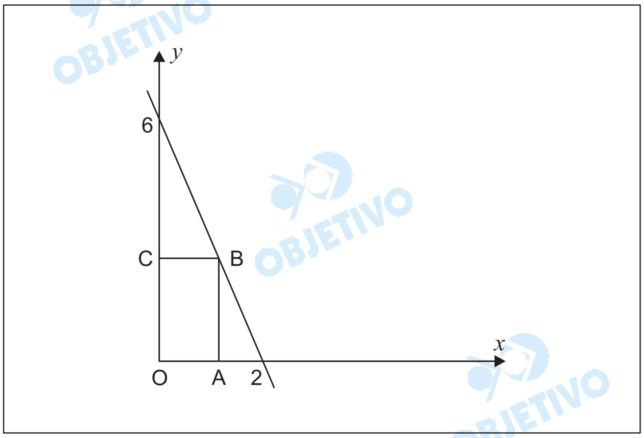
I) $S_A = 2\pi \cdot 8^2 + 2\pi \cdot 8 \cdot 2 = 160\pi$

II) $S_B = 2\pi \cdot 4^2 + 2\pi \cdot 4 \cdot 8 = 96\pi$

O valor de x é $\dfrac{160\pi - 96\pi}{96\pi} \cdot 100 \cong 66,66$

15 b

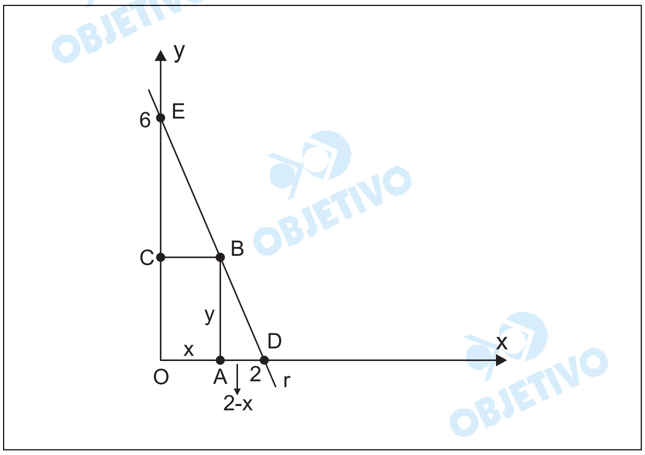
Na figura abaixo, considere o retângulo OABC, em que B pertence à reta r e está situado no 1º quadrante.



A área máxima possível desse retângulo é igual a:

a) 3,1 b) 3 c) 3,2 d) 3,3 e) 3,4

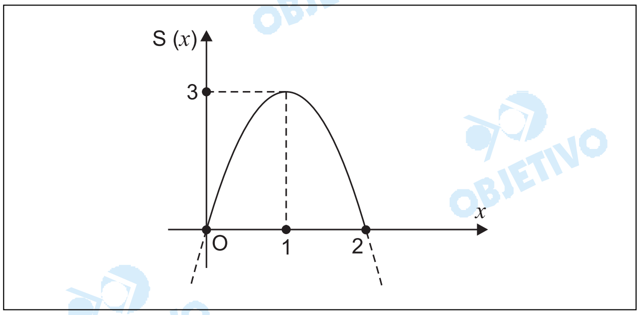
Resolução



Da semelhança dos triângulos ODE e ADB tem-se

$$\frac{OE}{AB} = \frac{OD}{AD} \Leftrightarrow \frac{6}{y} = \frac{2}{2-x} \Leftrightarrow y = -3x + 6$$

A área S(x) do retângulo OABC é dada por $S(x) = x \cdot y =$ $= x \cdot (-3x + 6) = -3x^2 + 6x$, *e é máxima para* $x = 1$, *pois o gráfico de S(x) é do tipo*



Desta forma, a área máxima possível desse retângulo é $S(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 3$ *unidades de área.*