MATEMÁTICA

21 d

Um reservatório, com 40 litros de capacidade, já contém 30 litros de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de:

a) 20% b) 22% c) 24% d) 26% e) 28%

Resolução

Nos 30 litros iniciais de mistura temos 18% . 30 ℓ de álcool. Nos 10 litros restantes temos x litros de álcool. Com o tanque completo teremos 40 litros de mistura, com 20% de álcool. Assim sendo, 18% . 30 ℓ + x ℓ = 20% . 40 ℓ ⇔

⇔ 5,4 + x = 8 ⇔ x = 2,6

A porcentagem de álcool nos dez litros de mistura a ser acrescentado é $\frac{2,6}{10} = 0,26 = 26\%$.

22 c

Um estacionamento cobra R$ 6,00 pela primeira hora de uso, R$ 3,00 por hora adicional e tem uma despesa diária de R$ 320,00. Considere-se um dia em que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. O número mínimo de usuários necessário para que o estacionamento obtenha lucro nesse dia é:

a) 25 b) 26 c) 27 d) 28 e) 29

Resolução

Se x é o número de usuários então x é o número de primeiras horas e sendo y o número de horas adicionais, tem-se:

$$\begin{cases} 6x + 3y > 320 \\ x + y = 80 \Leftrightarrow y = 80 - x \end{cases}$$

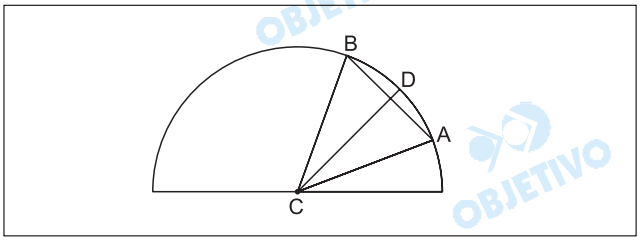
$6x + 3(80 - x) > 320 \Leftrightarrow 6x + 240 - 3x > 320 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x > 80 \Leftrightarrow x > \frac{80}{3} = 26,\ldots$

O número mínimo de usuários para que haja lucro é 27.

23 a

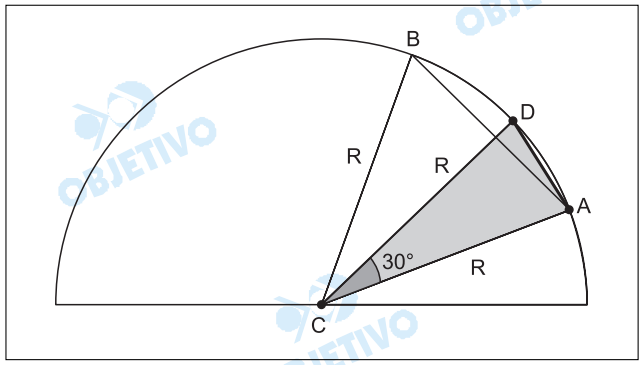
Em uma semi-circunferência de centro C e raio R, inscreve-se um triângulo equilátero ABC. Seja D o ponto onde a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ intercepta a semi-circunferência. O comprimento da corda $\overline{AD}$ é:



a) $R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ b) $R\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{3}}$ c) $R\sqrt{\sqrt{2} - 1}$

d) $R\sqrt{\sqrt{3} - 1}$ e) $R\sqrt{3 - \sqrt{2}}$

Resolução



No triângulo ACD, tem-se:

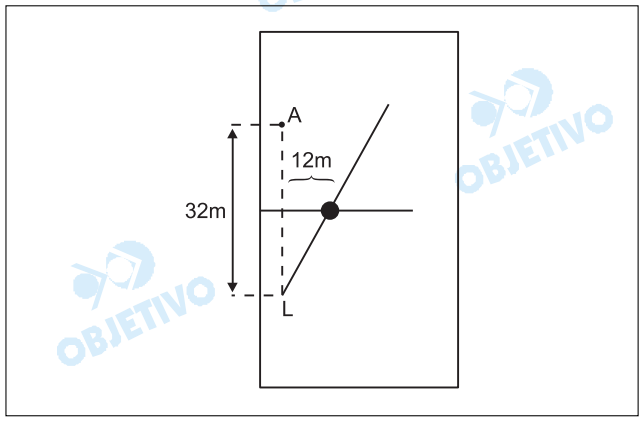
$(AD)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 30° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (AD)^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (AD)^2 = R^2 \cdot (2 - \sqrt{3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = R \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

24 b

Um lateral L faz um lançamento para um atacante A, situado 32 m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e quando passa pela linha de meio do campo está a uma distância de 12m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de:



a) 18,8m b) 19,2m c) 19,6m d) 20m e) 20,4m

Resolução

A menor distância do atacante à trajetória da bola está na perpendicular à trajetória que contém a posição do atacante. Na figura seguinte é a medida do segmento $\overline{AP}$. Assim, considerando os dados da figura em metros, temos:

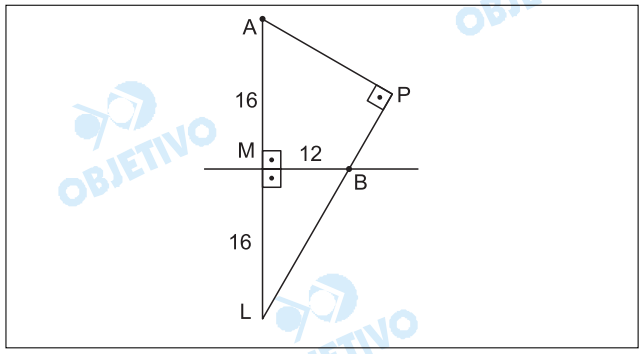
1) No triângulo LMB, retângulo em M,

$(LM)^2 + (MB)^2 = (LB)^2 \Rightarrow 16^2 + 12^2 = (LB)^2 \Rightarrow LB = 20$

2) Da semelhança dos triângulos LPA e LMB,

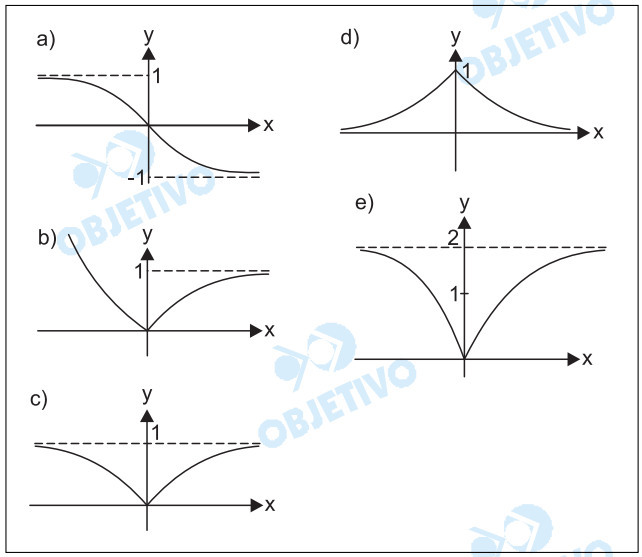
$\frac{AP}{BM} = \frac{AL}{BL} \Rightarrow \frac{AP}{12} = \frac{32}{20} \Leftrightarrow AP = \frac{96}{5} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow AP = 19,2$



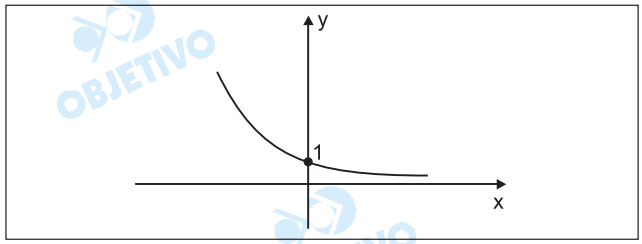
25 c

Das alternativas abaixo, a que melhor corresponde ao gráfico da função $f(x) = 1 - 2^{-|x|}$ é:

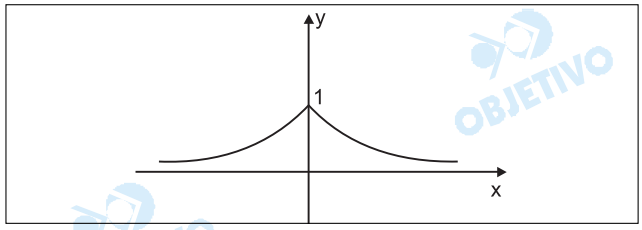


Resolução

1) O gráfico da função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é

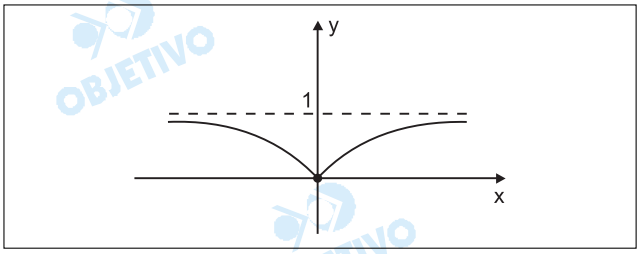


2) O gráfico da função h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ é



3) O gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - 2^{-|x|}$ ⇔

$\Leftrightarrow f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ é



26 e

Um número racional r tem representação decimal da forma $r = a_1a_2,a_3$ onde $1 \le a_1 \le 9$, $0 \le a_2 \le 9$, $0 \le a_3 \le 9$.
Supondo-se que:
• a parte inteira de r é o quádruplo de a_3,
• a_1,a_2,a_3 estão em progressão aritmética,
• a_2 é divisível por 3,
então a_3 vale:
a) 1 b) 3 c) 4 d) 6 e) 9

Resolução

Seja $r = a_1a_2,a_3$, com $1 \le a_1 \le 9$, $0 \le a_2 \le 9$ e $0 \le a_3 \le 9$, tal que:

$$\begin{cases} 10a_1 + a_2 = 4a_3 \\ 2a_2 = a_1 + a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{a_2}{2} \\ a_3 = \frac{3a_2}{2} \end{cases}$$

Como a_2 é múltiplo de 3 e $a_1 = \frac{a_2}{2} \in \mathbb{N}^*$, concluímos que $a_2 = 6$. Logo $a_3 = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$

27 d

Se x é um número real, $x > 2$ e $\log_2(x - 2) - \log_4 x = 1$, então o valor de x é:
a) $4 - 2\sqrt{3}$ b) $4 - \sqrt{3}$ c) $2 + 2\sqrt{3}$
d) $4 + 2\sqrt{3}$ e) $2 + 4\sqrt{3}$

Resolução

Sendo $x > 2$, temos:

$$\log_2(x - 2) - \log_4 x = 1 \Leftrightarrow \log_2(x - 2) - \frac{\log_2 x}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x - 2) - \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2\left[\frac{(x - 2)^2}{x}\right] = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 2)^2}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow x = 4 + 2\sqrt{3} \text{ pois } x > 2$$

28 e

Uma matriz real A é ortogonal se $AA^t = I$, onde I indica a

matriz identidade e A^t indica a transposta de A. Se

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{bmatrix}$ é ortogonal, então $x^2 + y^2$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{3}{2}$

Resolução

$$1)\ A \cdot A^t = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & y \\ x & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + x^2 & \frac{1}{2}y + xz \\ \frac{1}{2}y + xz & y^2 + z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} + x^2 = 1 \\ \frac{1}{2}y + xz = 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}y = -xz \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

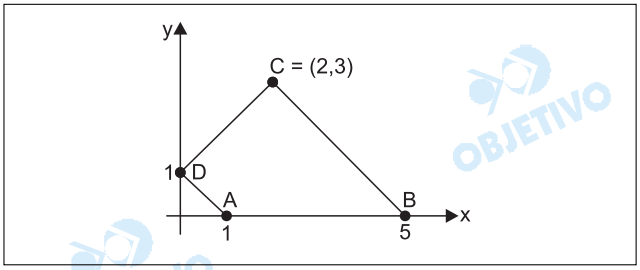
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4} \\ y^2 = 4x^2z^2 \\ z^2 = 1 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4} \\ y^2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot (1 - y^2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4} \\ y^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$$

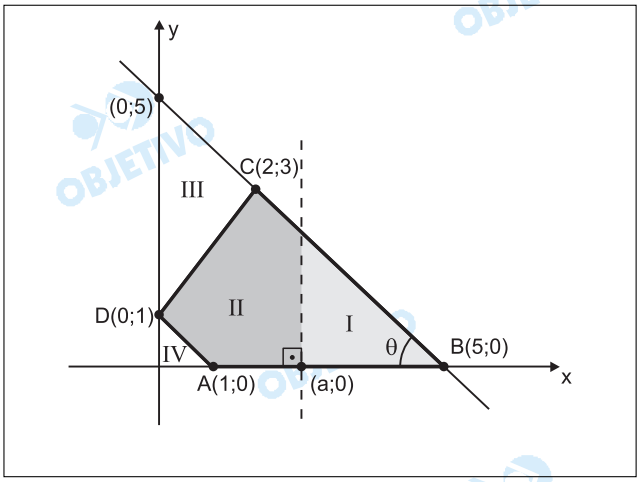
29 b

Duas irmãs receberam como herança um terreno na forma do quadrilátero ABCD, representado abaixo em um sistema de coordenadas. Elas pretendem dividi-lo, construindo uma cerca reta perpendicular ao lado AB passando pelo ponto P = (a,0). O valor de a para que se obtenham dois lotes de mesma área é:

a) $\sqrt{5} - 1$ b) $5 - 2\sqrt{2}$ c) $5 - \sqrt{2}$
d) $2 + \sqrt{5}$ e) $5 + 2\sqrt{2}$



Resolução



Notando que a reta que passa pelos pontos (5;0) e (2;3) tem coeficiente angular igual a – 1, então o ângulo θ é igual a 45°. A partir do enunciado, temos:

1) $A_I = A_{II} = \frac{(5-a)^2}{2}$

2) $A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$

Portanto: $\frac{(5-a)^2}{2} + \frac{(5-a)^2}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{25}{2}$

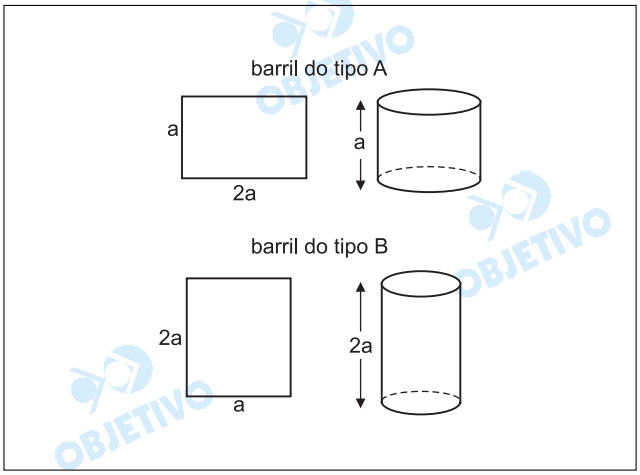
$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5-a)^2 = 8 \Rightarrow 5 - a = 2\sqrt{2}$ *(pois* $a < 5$*)* $\Leftrightarrow a = 5 - 2\sqrt{2}$

30 a

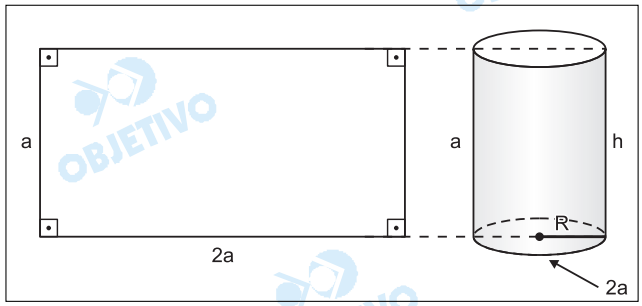
Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de dois tipos, A e B, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados a e 2a, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado ao lado.
Se V_A e V_B indicam os volumes dos barris do tipo A e B, respectivamente, tem-se:

a) $V_A = 2V_B$ b) $V_B = 2V_A$ c) $V_A = V_B$
d) $V_A = 4V_B$ e) $V_B = 4V_A$

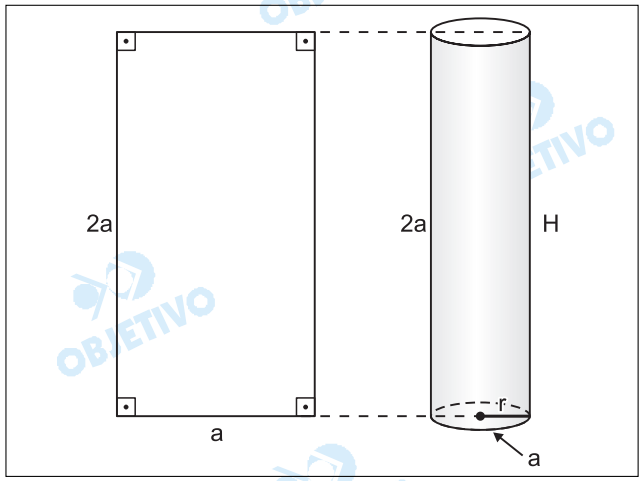


Resolução

barril A



barril B



Sendo h e H as alturas dos barris A e B, respectivamente, tem-se: h = a e H = 2a.
Assim: H = 2h
Sendo R e r os raios das bases dos barris A e B, respectivamente, tem-se:

1) $2\pi R = 2a \Leftrightarrow R = \frac{a}{\pi}$

2) $2\pi r = a \Leftrightarrow r = \frac{a}{2\pi}$

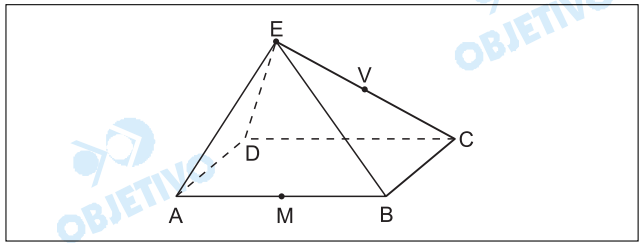
Assim: R = 2r
Finalmente, sendo V_A *e* V_B*, respectivamente, os volumes desses barris tem-se:*

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\pi R^2 h}{\pi r^2 H} \Leftrightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{(2r)^2 h}{r^2 2h} \Leftrightarrow \frac{V_A}{V_B} = 2 \Leftrightarrow V_A = 2V_B$$

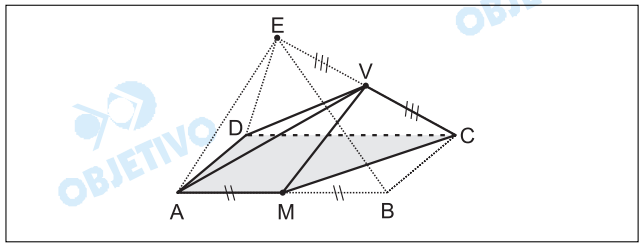
31 b

A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta $\overline{AB}$ e V é o ponto médio da aresta $\overline{EC}$, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:

a) 1 b) 1,5 c) 2 d) 2,5 e) 3



Resolução



De acordo com o enunciado pode-se concluir que a área da base (A_b) da pirâmide AMCDV é $\frac{3}{4}$ da área da base (A_B) da pirâmide ABCDE e que a altura h da pirâmide AMCDV é metade da altura H da pirâmide ABCDE.

Assim, sendo v o volume da pirâmide AMCDV, tem-se:

$$v = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot A_B \cdot \frac{1}{2} \cdot H = \frac{A_B \cdot H}{8}$$

Por outro lado: $\frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H = 4 \Leftrightarrow A_B \cdot H = 12$

Logo: $v = \frac{12}{8} = 1,5$

32 c

Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

a) 12 b) 18 c) 36 d) 72 e) 108

Resolução

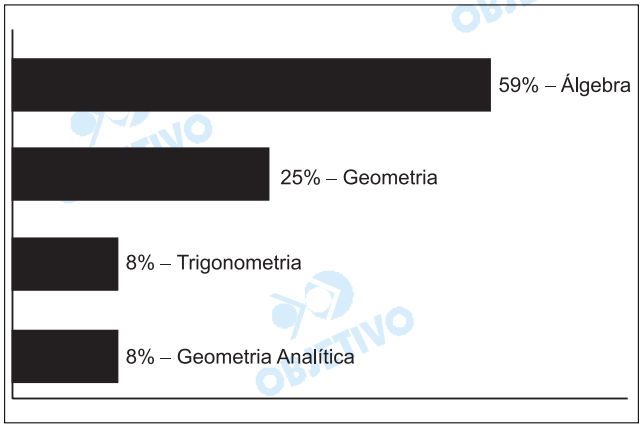
1) Como há 4 serviços e 3 empresas, nas condições do problema, uma das empresas fará 2 serviços.
2) Das 3 empresas, há $C_{3,1}$ maneiras de escolher a empresa que fará os 2 serviços.
3) Dos 4 serviços, há $C_{4,2}$ maneiras de escolher os 2 serviços que serão feitos por aquela empresa.
4) Os outros dois serviços poderão ser permutados pelas duas outras empresas.

Logo, os trabalhos podem ser distribuídos de

$$C_{3,1} \cdot C_{4,2} \cdot P_2 = 3 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 2 = 36 \text{ maneiras.}$$

Comentário

Com sete testes de álgebra, três de geometria, um de trigonometria e um de geometria analítica, todos muito bem enunciados, a banca examinadora organizou uma excelente prova de Matemática, na qual podemos destacar os seguintes pontos:
1º) A originalidade de alguns testes.
2º) A precisão de todos os enunciados.
3º) A abrangência relativa do programa exigido.
4º) O cunho prático de algumas questões.


59% – Álgebra
25% – Geometria
8% – Trigonometria
8% – Geometria Analítica