# Matemática

ITA

ETAPA

## NOTAÇÕES

C: conjunto dos números complexos.
Q: conjunto dos números racionais.
R: conjunto dos números reais.
Z: conjunto dos números inteiros.
N = {0, 1, 2, 3, ...}.
$N^* = \{1, 2, 3, ...\}$.
$i$: unidade imaginária; $i^2 = -1$.
$z = x + iy$, $x, y \in R$.
$\bar{z}$: conjugado do número $z$, $z \in C$.
$|z|$: módulo do número $z$, $z \in C$.
$[a, b] = \{x \in R; a \le x \le b\}$.
$]a, b[ = \{x \in R; a < x < b\}$.
$\emptyset$: conjunto vazio.
$A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$.
$n(U)$: número de elementos do conjunto $U$.
$P(A)$: coleção de todos os subconjuntos de $A$.
$f \circ g$: função composta de $f$ com $g$.
$I$: matriz identidade $n \times n$.
$A^{-1}$: inversa da matriz inversível $A$.
$A^T$: transposta da matriz $A$.
det $A$: determinante da matriz $A$.
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos $A$ e $B$.
$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferência de extremidades $A$ e $B$.
$m(\overline{AB})$ : medida (comprimento) de $\overline{AB}$.

## Questão 1

Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:
I. $\emptyset \in U$ e $n(U) = 10$.
II. $\emptyset \subset U$ e $n(U) = 10$.
III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$.
IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$.
Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)
a) apenas I e III.
b) apenas II e IV.
c) apenas II e III.
d) apenas IV.
e) todas as afirmações.

**alternativa C**

*Com relação ao conjunto U, temos que $\emptyset \notin U$, $\emptyset \subset U$, $n(U) = 10$, $5 \in U$, $\{5\} \subset U$. Temos ainda que $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = \{5\}$.*
*Logo apenas as afirmações II e III são verdadeiras.*

## Questão 2

Seja o conjunto $S = \{r \in Q : r \ge 0 \text{ e } r^2 \le 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:
I. $\frac{5}{4} \in S$ e $\frac{7}{5} \in S$.
II. $\{x \in R : 0 \le x \le \sqrt{2}\} \cap S = \emptyset$.
III. $\sqrt{2} \in S$.
Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas
a) I e II
b) I e III
c) II e III
d) I
e) II

**alternativa D**

*$S = \{r \in Q : r \ge 0$ e $r^2 \le 2\} = \{r \in Q : 0 \le r \le \sqrt{2}\}$*
*Analisemos, agora, as afirmações:*
*I. $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} < 2$ e $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} < 2$. Logo $\frac{5}{4} \in S$ e $\frac{7}{5} \in S$, ou seja, I é verdadeira.*
*II. $\{x \in R : 0 \le x \le \sqrt{2}\} \cap S =$*
*$= \{x \in Q : 0 \le x \le \sqrt{2}\} = S$*
*Como $S \ne \emptyset$, II é falsa.*
*III. Temos que $\sqrt{2} \notin Q$, portanto $\sqrt{2} \notin S$ e III é falsa.*
*Assim, apenas I é verdadeira.*

## Questão 3

Seja $\alpha$ um número real, com $0 < \alpha < 1$. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de $x$ tais que $\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1$.
a) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$
b) $]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$
c) $]0, 2[$
d) $]-\infty, 0[$
e) $]2, +\infty[$

**alternativa C**

*Com $\alpha \in R$, $0 < \alpha < 1$, temos*

$$\alpha^{2x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1 \Leftrightarrow \alpha^{2x} \cdot \alpha^{-x^2} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{2x-x^2} < \alpha^0 \Leftrightarrow 2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (x-2) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

*Assim* $V = ]0; 2[$.

## Questão 4

Considere a função $f: R \to C$, $f(x) = 2\cos x + 2i \operatorname{sen} x$. Então, $\forall x, y \in R$, o valor do produto $f(x)f(y)$ é igual a

a) $f(x+y)$
b) $2f(x+y)$
c) $4if(x+y)$
d) $f(xy)$
e) $2f(x) + 2if(y)$

**alternativa B**

*Temos* $f(x) = 2\cos x + 2i \operatorname{sen} x$ *e* $f(y) = 2\cos y + 2i \operatorname{sen} y$.

*Assim,* $f(x) \cdot f(y) = 4\cos x \cos y + 4i \operatorname{sen} x \cos y + 4i \operatorname{sen} y \cos x - 4 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) \cdot f(y) = 2[2\cos(x+y) + 2i \operatorname{sen}(x+y)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) \cdot f(y) = 2f(x+y)$.

## Questão 5

Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?

a) 210 b) 315 c) 410 d) 415 e) 521

**alternativa A**

*Um triângulo é determinado por 3 pontos não colineares. Há* $\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$ *maneiras de escolher um subconjunto de 3 dos 12 pontos dados, porém* $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ *desses subconjuntos são formados por pontos colineares. Logo podemos formar* $220 - 10 = 210$ *triângulos com vértices nesses pontos.*

## Questão 6

Seja $x \in R$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} 2^x & (x^2+1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$.

Assinale a opção correta.

a) $\forall x \in R$, $A$ possui inversa.
b) Apenas para $x > 0$, $A$ possui inversa.
c) São apenas dois os valores de $x$ para os quais $A$ possui inversa.
d) Não existe valor de $x$ para o qual $A$ possui inversa.
e) Para $x = \log_2 5$, $A$ não possui inversa.

**alternativa A**

*A matriz A é inversível se, e somente se,*

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow 2^x \cdot \log_2 5 - 2^x \cdot (x^2+1)^{-1} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x\left(\log_2 5 - \frac{1}{x^2+1}\right) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} \neq \log_2 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 \neq \log_5 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \neq \log_5 2 - 1 \Leftrightarrow x^2 \neq \log_5 \frac{2}{5} \quad (*)$$

*Como* $\log_5 \frac{2}{5} < 0$, *a expressão* $(*)$ *é verdadeira* $\forall x \in R$.

*Portanto a matriz A possui inversa,* $\forall x \in R$.

## Questão 7

Considerando as funções

arc sen: $[-1, +1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ e
arc cos: $[-1, +1] \to [0, \pi]$,

assinale o valor de $\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right)$.

a) $\frac{6}{25}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{5}{12}$

**alternativa B**

$$\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right) = \cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right) \cdot$$

$$\cdot \cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right) - \operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right) \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sen}\left(\arccos\frac{4}{5}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{25}$$

## Questão 8

Considere um polígono convexo de nove lados, em que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética de razão igual a $5^o$. Então seu maior ângulo mede, em graus,

a) 120  b) 130  c) 140  d) 150  e) 160

### alternativa E

*Sendo $\alpha$ o menor dos ângulos internos do polígono convexo de nove lados, sabendo que as medidas de seus ângulos internos constituem uma PA de razão igual a $5^o$, a soma dos ângulos internos é igual à soma dos 9 elementos da PA de primeiro termo $\alpha$ e razão $5^o$. Então*

$$\left(\frac{\alpha + (\alpha + 8 \cdot 5^o)}{2}\right) \cdot 9 = (9-2) \cdot 180^o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 20^o) \cdot 9 = 7 \cdot 180^o \Leftrightarrow \alpha = 120^o$$

*Assim o maior ângulo do polígono mede*
$\alpha + 8 \cdot 5^o = 120^o + 40^o = 160^o$.

## Questão 9

O termo independente de $x$ no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é

a) $729\sqrt[3]{45}$  b) $972\sqrt[3]{15}$  c) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

d) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$  e) $165\sqrt[3]{75}$

### alternativa E

*O termo geral do desenvolvimento do binômio é*

$$T_{p+1} = \binom{12}{p} \cdot \left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}}\right)^{12-p} \cdot \left(-\sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{p} =$$

$$= \binom{12}{p} \cdot \left(\frac{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}}{5x}\right)^{\frac{1}{2}\cdot(12-p)} \cdot \left(-\frac{5x}{3 \cdot x^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}\cdot p} =$$

$$= \binom{12}{p} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}(12-p)} \cdot \left(-\frac{5}{3} \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}\cdot p} =$$

$$= \binom{12}{p} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{6-\frac{p}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}(12-p)} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^{\frac{p}{3}} \cdot x^{\frac{p}{6}} =$$

$$= \binom{12}{p} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{6-\frac{p}{2}} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^{\frac{p}{3}} \cdot x^{-4+\frac{p}{2}}.$$

*O termo $T_{p+1}$ é independente de x quando $-4 + \frac{p}{2} = 0 \Leftrightarrow p = 8$. Assim,*

$$T_9 = \binom{12}{8} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^{\frac{8}{3}} =$$

$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = 165\sqrt[3]{75}$ *é o termo procurado.*

## Questão 10

Considere as afirmações dadas a seguir, em que $A$ é uma matriz quadrada $n \times n$, $n \geq 2$:

I. O determinante de $A$ é nulo se e somente se $A$ possui uma linha ou uma coluna nula.

II. Se $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$, com $i, j = 1, 2, \ldots, n$, então det $A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

III. Se $B$ for obtida de $A$ multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2}+1$ e a segunda por $\sqrt{2}-1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então det $B$ = det $A$.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s)

a) apenas II.  b) apenas III.
c) apenas I e II.  d) apenas II e III.
e) todas.

### alternativa D

*I. Falsa, pois* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *não possui linha ou coluna nula, mas* det $A = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$.

*II. Verdadeira, pois* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$

*é uma matriz triangular, e seu determinante é dado pelo produto dos elementos de sua diagonal principal, isto é,* det $A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

*III. Verdadeira, pois* det $B = (\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1) \cdot$ det $A = (2-1)$det $A$ = det $A$.

## Questão 11

Considere um cilindro circular reto, de volume igual a $360\pi$ cm$^3$, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3}$ cm$^2$, então, a área lateral da pirâmide mede, em cm$^2$,

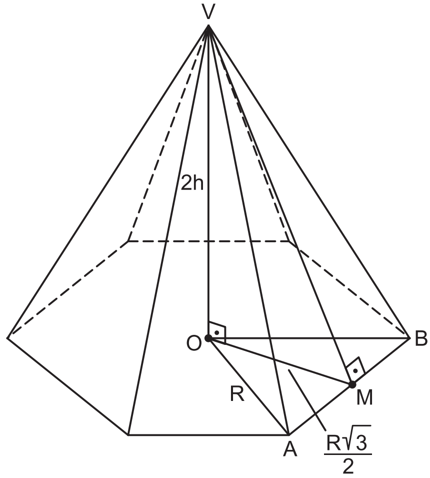
a) $18\sqrt{427}$ b) $27\sqrt{427}$ c) $36\sqrt{427}$
d) $108\sqrt{3}$ e) $45\sqrt{427}$

### alternativa A

*A base hexagonal da pirâmide está inscrita na base de um cilindro de raio R e sua área é $54\sqrt{3}$ cm$^2$, isto é, $6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \Leftrightarrow R^2 = 36 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow R = 6$ cm.*

*O cilindro tem altura h e volume $360\pi$ cm$^3$, isto é, $\pi \cdot 36 \cdot h = 360\pi \Leftrightarrow h = 10$ cm.*

*Agora, observe a figura a seguir, onde AOB é um triângulo eqüilátero:*




*No triângulo VOM, retângulo em O:*

$$VM^2 = OM^2 + VO^2 \Leftrightarrow VM^2 = \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (2h)^2 =$$
$$= \left(\frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (2 \cdot 10)^2 \Leftrightarrow VM = \sqrt{427} \text{ cm}$$

*A área lateral da pirâmide é $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot VM =$ $= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{427} = 18\sqrt{427}$ cm$^2$.*

## Questão 12

O conjunto de todos os valores de $\alpha$, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tais que as soluções da equação (em $x$)

$$x^4 - \sqrt[4]{48}\,x^2 + \text{tg}\,\alpha = 0$$

são todas reais, é

a) $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ b) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
c) $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ d) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$
e) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$

### alternativa D

*Como $x^4 - \sqrt[4]{48}\,x^2 + \text{tg}\alpha = 0 \Leftrightarrow$*

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} y^2 - \sqrt[4]{48}\,y + \text{tg}\alpha = 0 \\ y = x^2 \end{array}\right.$*, as soluções da equação dada são todas reais se, e somente se, a equação $y^2 - \sqrt[4]{48}\,y + \text{tg}\alpha = 0$ admite apenas soluções não negativas. Isso ocorre se, e somente se,*

$$\left|\begin{array}{l} \Delta \ge 0 \\ S \ge 0 \\ P \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (-\sqrt[4]{48})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \text{tg}\alpha \ge 0 \\ \text{tg}\alpha \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \text{tg}\alpha \le \sqrt{3} \ (*)$$

*Sendo $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $(*) \Leftrightarrow$*

$$\Leftrightarrow 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$$

## Questão 13

Sejam as funções $f$ e $g$ definidas em R por $f(x) = x^2 + \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta x)$, em que $\alpha$ e $\beta$ são números reais. Considere que estas funções são tais que

| $f$ | | $g$ | |
|---|---|---|---|
| *Valor mínimo* | *Ponto de mínimo* | *Valor máximo* | *Ponto de máximo* |
| $-1$ | $< 0$ | $\frac{9}{4}$ | $> 0$ |

Então a soma de todos os valores de $x$ para os quais $(f \circ g)(x) = 0$ é igual a

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

### alternativa D

*Sendo $f(x) = x^2 + \alpha x$ com valor mínimo igual a $-1$ e ponto de mínimo negativo, temos:*

$$\begin{cases} \dfrac{-(\alpha^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0)}{4 \cdot 1} = -1 \\ -\dfrac{\alpha}{2 \cdot 1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha = -2 \text{ ou } \alpha = 2) \\ \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha = 2$

*Sendo $g(x) = -x^2 - \beta x$ com valor máximo igual a $\dfrac{9}{4}$ e ponto de máximo positivo, temos:*

$$\begin{cases} \dfrac{-((-\beta)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0)}{4 \cdot (-1)} = \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{-(-\beta)}{2 \cdot (-1)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\beta = -3 \text{ ou } \beta = 3) \\ \beta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \beta = -3$$

*Então $f(x) = x^2 + 2x = x(x+2)$ e $g(x) = -x^2 + 3x$.*

*Logo $(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow$*

$\Leftrightarrow g(x) \cdot [g(x) + 2] = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ *ou* $g(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x = 0 \\ \text{ou} \\ -x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 3 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{17}}{2} \text{ ou } x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

*A soma de todos os valores de x para os quais $(f \circ g)(x) = 0$ é 6.*

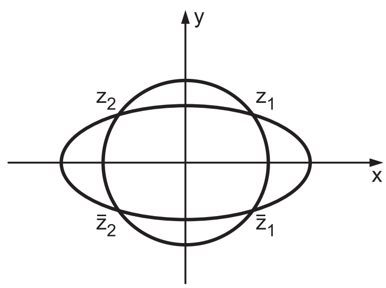
## Questão 14

Considere todos os números $z = x + i\,y$ que têm módulo $\sqrt{7}/2$ e estão na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Então o produto deles é igual a

a) $\dfrac{25}{9}$ b) $\dfrac{49}{16}$ c) $\dfrac{81}{25}$ d) $\dfrac{25}{7}$ e) 4

### alternativa B

*O conjunto dos números complexos $z = x + iy$, $x \in R$ e $y \in R$, que têm módulo $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ e estão na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ é a intersecção da circunferência de centro na origem e raio $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ com a elipse $x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ de centro na origem e eixo menor de medida 1 sobre o eixo y.*




*Como os centros estão na origem e o eixo menor da elipse é menor que o raio da circunferência, por simetria, há 4 intersecções $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$. Logo o produto de tais números é*

$z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 =$

$= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \dfrac{49}{16}$.

## Questão 15

Para algum número real $r$, o polinômio $8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$ é divisível por $(x - r)^2$. Qual dos números abaixo está mais próximo de $r$?

a) 1,62 b) 1,52 c) 1,42
d) 1,32 e) 1,22

### alternativa B

*Pelas condições dadas, r é uma raiz dupla de $P(x) = 8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$, ou seja, r é uma raiz da derivada de $P(x)$, $P'(x) = 24x^2 - 8x - 42$.*

*Como $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 24x^2 - 8x - 42 = 0 \Leftrightarrow$*

$\Leftrightarrow r = \dfrac{3}{2}$ *ou* $r = -\dfrac{7}{6}$, *basta verificarmos qual desses valores é raiz de P(x).*

*Assim, a partir de*

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{3}{2} & 8 & -4 & -42 & 45 \\
\hline
 & 8 & 8 & -30 & \| \ 0
\end{array},$$

*podemos concluir que* $r = \frac{3}{2} = 1{,}5$, *que está mais próximo de 1,52.*

## Questão 16

Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos $(x, y)$ do plano que satisfazem a equação

$$\det\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288.$$

a) Uma elipse.
b) Uma parábola.
c) Uma circunferência.
d) Uma hipérbole.
e) Uma reta.

### alternativa C

*Aplicando Chió,*

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 288 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 \\ 40-34 & 2-5 & 6-3 \\ 4-34 & 2-5 & 0-3 \end{vmatrix} =$$

$$= 288 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 \\ 6 & -3 & 3 \\ -30 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 288 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-3)(-3)\begin{vmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 288 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 34 - 10(x-5) - 2(y-3) - 10(y-3) + {}$
$+ x^2 + y^2 - 34 + 2(x-5) = 32 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$, *que representa uma circunferência de centro (2; 3) e raio 5.*

## Questão 17

A soma das raízes da equação $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0$, $z \in \mathbb{C}$, é igual a

a) –2  b) –1  c) 0  d) 1  e) 2

### alternativa A

*Lembrando que, para* $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, *e sendo* $z = a + bi$, *a, b reais,* $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z^3 + z^2 - z \cdot \bar{z} + 2z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + z - \bar{z} + 2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = 0$ *ou* $z^2 + z - \bar{z} + 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = 0$ *ou* $(a+bi)^2 + a + bi - (a - bi) + 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = 0$ *ou* $a^2 - b^2 + 2 + (2ab + 2b)i = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } \left|\begin{array}{l} a^2 - b^2 + 2 = 0 \\ 2b(a+1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou}$$

$$\left|\begin{array}{l} a^2 - b^2 + 2 = 0 \\ (b = 0 \text{ ou } a = -1) \end{array}\right. \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou}$$

$(a = -1 \text{ e } b = \sqrt{3})$ *ou* $(a = -1 \text{ e } b = -\sqrt{3}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = 0$ *ou* $z = -1 + \sqrt{3}i$ *ou* $z = -1 - \sqrt{3}i$
*Logo a soma das raízes da equação dada é* $0 + (-1 + \sqrt{3}i) + (-1 - \sqrt{3}i) = -2$.

## Questão 18

Dada a equação $x^3 + (m+1)x^2 + (m+9)x + 9 = 0$, em que $m$ é uma constante real, considere as seguintes afirmações:

I. Se $m \in \,]-6, 6[$, então existe apenas uma raiz real.
II. Se $m = -6$ ou $m = +6$, então existe raiz com multiplicidade 2.
III. $\forall m \in R$, todas as raízes são reais.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I  b) II  c) III  d) II e III  e) I e II

### alternativa E

$x^3 + (m+1)x^2 + (m+9)x + 9 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x(x^2 + mx + 9) + (x^2 + mx + 9) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + mx + 9) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = -1 \\ \quad \text{ou} \\ x^2 + mx + 9 = 0 \end{array}\right.$$

*Assim:*

*I. Verdadeira. Para $m \in ]-6; 6[$ a equação $x^2 + mx + 9 = 0$ tem $\Delta = m^2 - 36 < 0$ e, neste caso, a equação inicial possui apenas uma raiz real igual a $-1$.*

*II. Verdadeira. Para $m = -6$ a equação $x^2 - 6x + 9 = 0$ possui uma raiz dupla igual a 3 e para $m = 6$ a equação $x^2 + 6x + 9 = 0$ possui uma raiz dupla igual a $-3$.*

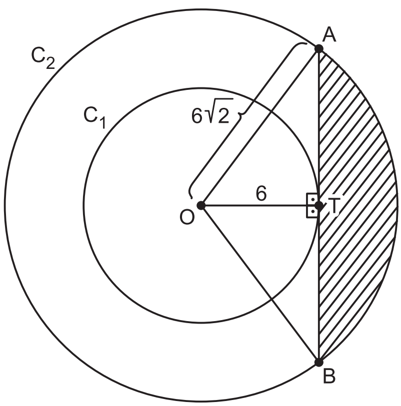
*III. Falsa. Já vimos no item I que, para $m \in ]-6; 6[$, a equação tem apenas uma raiz real simples.*

## Questão 19

Duas circunferências concêntricas $C_1$ e $C_2$ têm raios de 6 cm e $6\sqrt{2}$ cm, respectivamente. Seja $\overline{AB}$ uma corda de $C_2$, tangente à $C_1$. A área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\widehat{AB}$ mede, em cm$^2$,

a) $9(\pi - 3)$ b) $18(\pi + 3)$ c) $18(\pi - 2)$
d) $18(\pi + 2)$ e) $16(\pi + 3)$

### alternativa C




*Como a corda $\overline{AB}$ é tangente à circunferência $C_1$, então $m(A\hat{T}O) = 90^o$. No triângulo retângulo OTA, temos $\cos(A\hat{O}T) = \dfrac{6}{6\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m(A\hat{O}T) = 45^o$.*

*Analogamente, $m(B\hat{O}T) = 45^o$.*

*Assim, o menor setor circular AOB tem ângulo central de medida $m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}T) + m(B\hat{O}T) = 90^o$. A área pedida é a diferença entre a área do setor AOB e a área do triângulo AOB, ou seja:*

$$\frac{\pi \cdot (6\sqrt{2})^2}{4} - \frac{(6\sqrt{2})(6\sqrt{2})}{2} = 18(\pi - 2)\,cm^2$$

## Questão 20

A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede $R$ cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm$^3$, é igual a

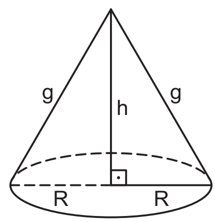
a) $\pi R^3$ b) $\pi\sqrt{2}R^3$ c) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}R^3$
d) $\pi\sqrt{3}R^3$ e) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}R^3$

### alternativa E

*Sendo g a geratriz do cone:*

$$\pi R^2 + \pi Rg = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2R + 2g}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3R(R + g) = (R + g)^2 \Leftrightarrow 2R = g$$




*A altura do cone é $h = \sqrt{g^2 - R^2} = \sqrt{3R^2} = \sqrt{3}R$ cm.*

*Logo o volume do cone, em cm$^3$, é:*

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sqrt{3} \cdot R = \frac{\pi R^3}{\sqrt{3}}$$

## Questão 21

Seja $A$ um conjunto não vazio.

**a.** Se $n(A) = m$, calcule $n(P(A))$ em termos de $m$.

**b.** Denotando $P^1(A) = P(A)$ e $P^{k+1}(A) = P(P^k(A))$, para todo número natural $k \geq 1$, determine o menor $k$, tal que $n(P^k(A)) \geq 65000$, sabendo que $n(A) = 2$.

### Resposta

*a) Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ os elementos de A, A' um subconjunto qualquer de A e a m-upla ordenada $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m))$ tal que:*

$$\left|\begin{array}{l} f(a_i) = 0 \text{ se } a_i \notin A' \\ f(a_i) = 1 \text{ se } a_i \in A' \end{array}\right., i = 1, 2, \ldots, m.$$

*Assim, como para cada subconjunto de A corresponde uma única m-upla e para cada m-upla corresponde um único subconjunto de A, o número de subconjuntos de A é igual ao número de m-uplas. Portanto:*

$n(P(A)) = \underbrace{2 \cdot 2 \dots 2}_{m \text{ vezes}} = 2^m.$

*b) Temos:*

$n(P^1(A)) = n(P(A)) = 2^{n(A)} = 2^2 = 4$

$n(P^2(A)) = n(P(P^1(A)) = 2^{n(P^1(A))} = 2^4 = 16$

$n(P^3(A)) = n(P(P^2(A)) = 2^{n(P^2(A))} = 2^{16} =$
$= 65\,536 > 65\,000.$

*Portanto o menor $k \in N$ tal que $n(P^k(A)) \geq 65\,000$ é $k = 3$.*

## Questão 22

Uma caixa branca contém 5 bolas verdes e 3 azuis, e uma caixa preta contém 3 bolas verdes e 2 azuis. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, 2 dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que 4, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais casos, retira-se uma bola da caixa preta. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola verde?

### Resposta

*Sendo S o conjunto dos resultados possíveis no lançamento de 2 dados, $n(S) = 6 \cdot 6 = 36$ e apenas os 3 pares (1; 1), (1; 2) e (2; 1) pertencem a S e têm soma menor que 4. Logo a probabilidade de a bola retirada ser da caixa branca é $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, e a probabilidade de ser da preta é $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.*

*Para a caixa branca, a probabilidade de escolher uma bola verde é $\frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$. Para a caixa preta, tal probabilidade é $\frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$.*

*Conseqüentemente, a probabilidade de se retirar uma bola verde é $\frac{1}{12} \cdot \frac{5}{8} + \frac{11}{12} \cdot \frac{3}{5} = \frac{289}{480}$.*

## Questão 23

Determine os valores reais do parâmetro $a$ para os quais existe um número real $x$ satisfazendo $\sqrt{1 - x^2} \geq a - x$.

### Resposta

$\sqrt{1 - x^2} \geq a - x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (a - x \geq 0 \text{ e } 1 - x^2 \geq (a - x)^2) \\ \qquad \text{ou} \\ (a - x < 0 \text{ e } 1 - x^2 \geq 0) \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (x \leq a \text{ e } 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 \leq 0) \\ \qquad \text{ou} \\ (x > a \text{ e } -1 \leq x \leq 1) \end{array} \right.$$

*Se $a < 1$, a inequação admite solução. Se $a \geq 1$, sendo o ponto de mínimo da função quadrática $f(x) = 2x^2 - 2ax + a^2 - 1$ igual a $-\frac{-2a}{2 \cdot 2} = \frac{a}{2} < a$, a inequação dada admite solução se, e somente se, o valor mínimo de f(x) é menor ou igual a zero, ou seja, quando*

$-\frac{(-2a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 - 1)}{4 \cdot 2} \leq 0 \text{ e } a \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - 2 \leq 0 \text{ e } a \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq a \leq \sqrt{2}$.

*Logo a inequação admite solução se, e somente se, $a \leq \sqrt{2}$.*

## Questão 24

Sendo $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule $\left| \sum_{n=1}^{60} z^n \right| = |z + z^2 + z^3 + \dots + z^{60}|$.

### Resposta

Temos $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} =$

$= 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow |z| = 1$. Portanto:

$$\left| \sum_{n=1}^{60} z^n \right| = \left| \frac{z(z^{60} - 1)}{z - 1} \right| = \frac{|z| \cdot |z^{60} - 1|}{|z - 1|} =$$

$$= 1 \cdot \frac{\left| \cos\left(60 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(60 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right|}{\left| \frac{1+i}{\sqrt{2}} - 1 \right|} =$$

$$= \frac{|-1 + i \cdot 0 - 1|}{\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

## Questão 25

Para $b > 1$ e $x > 0$, resolva a equação em $x$: $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$.

### Resposta

*Para b > 1 e x > 0, temos:*

$$(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0 \Leftrightarrow (3x)^{\log_b 3} = (2x)^{\log_b 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_b (3x)^{\log_b 3} = \log_b (2x)^{\log_b 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_b 3 \cdot (\log_b 3 + \log_b x) =$$

$$= \log_b 2 \cdot (\log_b 2 + \log_b x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_b 3 - \log_b 2) \cdot \log_b x =$$

$$= (\log_b 2)^2 - (\log_b 3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_b x = \frac{(\log_b 2 - \log_b 3)(\log_b 2 + \log_b 3)}{(\log_b 3 - \log_b 2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_b x = -\log_b 6 = \log_b 6^{-1} \Leftrightarrow x = 6^{-1} = \frac{1}{6}.$$

## Questão 26

Considere a equação $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$, em que $d$ é uma constante real. Para qual valor de $d$ a equação admite uma raiz dupla no intervalo $]0, 1[$ ?

### Resposta

*Sejam $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + d$ e r uma raiz dupla de P(x) pertencente ao intervalo ]0; 1[. Então r é uma raiz da derivada de P(x) e 0 < r < 1, ou seja:*

$$\begin{cases} 3r^2 + 6r - 2 = 0 \\ 0 < r < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(r = \frac{-6 + \sqrt{60}}{6} \text{ ou } r = \frac{-6 - \sqrt{60}}{6}\right) \\ 0 < r < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{-3 + \sqrt{15}}{3}$$

*Como r é raiz de P(x), utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini:*

| $\frac{-3+\sqrt{15}}{3}$ | $1$ | $3$ | $-2$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $\frac{6+\sqrt{15}}{3}$ | $\frac{-7+\sqrt{15}}{3}$ | $\frac{36-10\sqrt{15}}{9} + d$ |

*Portanto* $\frac{36 - 10\sqrt{15}}{9} + d = 0 \Leftrightarrow d = \frac{10\sqrt{15} - 36}{9}$

## Questão 27

Prove que, se os ângulos internos $\alpha, \beta$ e $\gamma$ de um triângulo satisfazem a equação

$$\mathrm{sen}(3\alpha) + \mathrm{sen}(3\beta) + \mathrm{sen}(3\gamma) = 0,$$

então, pelo menos, um dos três ângulos $\alpha, \beta$ ou $\gamma$ é igual a $60^o$.

### Resposta

*Sendo $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ medidas dos ângulos internos de um triângulo, $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$, $\alpha > 0^o$, $\beta > 0^o$ e $\gamma > 0^o$.*

*Assim,*

$$sen(3\alpha) + sen(3\beta) + sen(3\gamma) = sen(3\alpha) + sen(3\beta) +$$

$$+ sen(3(180^o - \alpha - \beta)) = sen(3\alpha) + sen(3\beta) +$$

$$+ sen(540^o - 3\alpha - 3\beta) = sen(3\alpha) + sen(3\beta) +$$

$$+ sen(3\alpha + 3\beta) = 2\, sen\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) +$$

$$+ 2\, sen\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)cos\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) =$$

$$= 2\, sen\left(\frac{3(\alpha + \beta)}{2}\right)\left(cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + cos\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\right) = 2\, sen\left(\frac{3(180^o - \gamma)}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot\, 2 \cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2} = 4\, sen\left(270^o - \frac{3\gamma}{2}\right)\cos\frac{3\alpha}{2} \cdot$$

$$\cdot \cos\frac{3\beta}{2} = -4\cos\frac{3\gamma}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2}$$

$$e \begin{cases} 0^o < \alpha < 180^o \\ 0^o < \beta < 180^o \\ 0^o < \gamma < 180^o \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0^o < \frac{3\alpha}{2} < 270^o \\ 0^o < \frac{3\beta}{2} < 270^o \\ 0^o < \frac{3\gamma}{2} < 270^o \end{cases},$$

$$sen(3\alpha) + sen(3\beta) + sen(3\gamma) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right) = 0 \text{ ou } cos\left(\frac{3\beta}{2}\right) = 0 \text{ ou } cos\left(\frac{3\gamma}{2}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \frac{3\alpha}{2} = 90^o$ ou $\frac{3\beta}{2} = 90^o$ ou $\frac{3\gamma}{2} = 90^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = 60^o$ ou $\beta = 60^o$ ou $\gamma = 60^o$.

*Logo a equação é satisfeita se, e somente se, pelo menos um dos ângulos internos do triângulo mede $60^o$.*

## Questão 28

Se $A$ é uma matriz real, considere as definições:

I. Uma matriz quadrada $A$ é ortogonal se e só se $A$ for inversível e $A^{-1} = A^T$.

II. Uma matriz quadrada $A$ é diagonal se e só se $a_{ij} = 0$, para todo $i, j = 1, \dots, n$, com $i \neq j$.

Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

### Resposta

*Sendo A uma matriz diagonal de ordem 3,* $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, *a, b, c ∈ R.*

*Para que A seja ortogonal,* $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \cdot b \cdot c \neq 0$ e $A^{-1} = A^T \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{1}{a} = a \\ \frac{1}{b} = b \\ \frac{1}{c} = c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (a = 1 \text{ ou } a = -1) \\ (b = 1 \text{ ou } b = -1) \\ (c = 1 \text{ ou } c = -1) \end{array} \right.$$

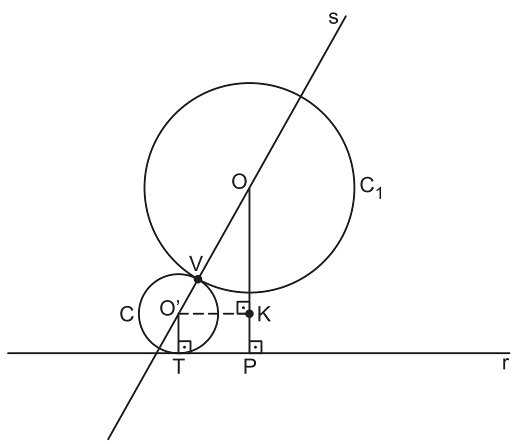
*Logo as matrizes de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais são da forma* $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ *tais que* $a, b, c \in \{-1, 1\}$.

## Questão 29

Sejam $r$ e $s$ duas retas que se interceptam segundo um ângulo de $60^o$. Seja $C_1$ uma circunferência de 3 cm de raio, cujo centro O se situa em $s$, a 5 cm de $r$. Determine o raio da menor circunferência tangente à $C_1$ e à reta $r$, cujo centro também se situa na reta $s$.

### Resposta

*Sendo O' o centro da circunferência procurada, T, P ∈ r e* $\overline{O'T} \perp r$, *então* $O'T = R$ *é o raio dessa circunferência. Sendo* $K \in \overline{OP}$ *tal que* $\overline{O'K} \parallel r$, *então* $OK = OP - PK = 5 - R$.




*Sendo V o ponto de tangência das duas circunferências, temos* $OO' = OV + O'V = 3 + R$.

*No* $\Delta OO'K$, *retângulo em K, temos* $\frac{OK}{OO'} = \operatorname{sen} 60^o$, *pois o ângulo agudo entre r e s é* $60^o$.

*Logo* $\frac{5 - R}{3 + R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow R = \frac{10 - 3\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 29 - 16\sqrt{3}$ *cm.*

## Questão 30

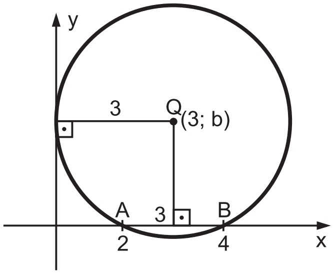
Sejam os pontos $A$: (2, 0), $B$: (4, 0) e $P$: $(3, 5 + 2\sqrt{2})$.

a) Determine a equação da circunferência $C$, cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos $A$ e $B$ e é tangente ao eixo $y$.

b) Determine as equações das retas tangentes à circunferência $C$ que passam pelo ponto $P$.

## Resposta

a)




*O centro da circunferência que passa por A, B e tangencia o eixo* y *é* $Q = (3; b)$ *e* $QA = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(3-2)^2 + (b-0)^2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{1 + b^2} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 = 8 \Leftrightarrow b = 2\sqrt{2}$

*Logo uma equação da circunferência é*

$(x-3)^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = 9.$

*b) Seja* $y - (5 + 2\sqrt{2}) = a(x-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax - y + 5 + 2\sqrt{2} - 3a = 0$ *a equação do feixe de retas, não verticais, concorrentes em P, e a o seu coeficiente angular. A reta vertical que contém P corta a circunferência em 2 pontos.*

*As retas desse feixe que tangenciam a circunferência distam 3 do centro* $Q = (3; 2\sqrt{2})$*, isto é:*

$$\frac{|a \cdot 3 - 2\sqrt{2} + 5 + 2\sqrt{2} - 3a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{a^2+1}} = 3 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3} \text{ ou } a = -\frac{4}{3}$$

*Então as equações das retas tangentes podem ser dadas por:*

$y - (5 + 2\sqrt{2}) = \frac{4}{3}(x-3)$ *e*

$y - (5 + 2\sqrt{2}) = -\frac{4}{3}(x-3)$