Questão 19

Resolver um *criptograma aritmético* significa usar a estratégia "tentativa e erro" para determinar quais números satisfazem as condições de um dado problema. Considere o *criptograma* seguinte, em que cada letra representa apenas um único algarismo, não nulo.

$$(AR)^2 = BAR$$

Para os valores de A, R e B encontrados, é correto afirmar que o "número" BARRA está compreendido entre

a) 45 000 e 50 000.
b) 50 000 e 55 000.
c) 55 000 e 60 000.
d) 60 000 e 65 000.
e) 65 000 e 70 000.

alternativa D

Nesse problema, AR é a representação decimal de $10 \cdot A + R$ e BAR é a representação decimal de $100 \cdot B + 10 \cdot A + R$.
Como cada letra representa apenas um único algarismo não nulo, $111 \le (AR)^2 \le 999 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 11 \le AR \le 31$ (*)
Temos ainda que $(AR)^2 = BAR \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (AR)^2 = 100 \cdot B + AR \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow AR \cdot (AR - 1) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot B$. Logo, como AR e AR − 1 são números primos entre si, AR é um múltiplo de 5^2 ou AR − 1 é um múltiplo de 5^2.
Assim, utilizando (*), $AR = 25$ e $25 \cdot 24 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot B \Leftrightarrow B = 6$ ou $AR = 26$ e $26 \cdot 25 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot B \Leftrightarrow B = 6,5$, que não é um algarismo.
Portanto BARRA = 62 552.

Questão 20

Para percorrer uma certa distância, um ciclista observou que, se conduzisse sua bicicleta à velocidade média de 12 km/h, chegaria a seu destino 1 hora após o meio-dia; entretanto, se a velocidade média fosse de 18 km/h, chegaria ao mesmo destino 1 hora antes do meio-dia. Se ele pretende fazer o mesmo percurso e chegar ao seu destino exatamente ao meio-dia, a quantos quilômetros por hora, em média, deverá conduzir sua bicicleta?

a) 15,6 b) 15 c) 14,4 d) 14,2 e) 14

alternativa C

Seja t o tempo, em horas, que o ciclista levaria para percorrer o trajeto, chegando ao seu destino ao meio-dia.
A distância a ser percorrida, em quilômetros, é $12 \cdot (t + 1)$, que é igual a $18 \cdot (t - 1)$ e, portanto, $t = 5$ h. Desse modo o ciclista deve percorrer $12 \cdot (5 + 1) = 72$ km e, para fazê-lo em 5 h, deverá conduzir sua bicicleta a uma velocidade média de $\frac{72}{5} = 14,4$ km/h.

Questão 21

Quantos números inteiros e estritamente positivos satisfazem a sentença $\frac{1}{x - 20} \le \frac{1}{12 - x}$?

a) Dezesseis.
b) Quinze.
c) Quatorze.
d) Treze.
e) Menos que treze.

alternativa B

$$\frac{1}{x-20} \le \frac{1}{12-x} \Leftrightarrow \frac{1}{x-20} - \frac{1}{12-x} \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{12 - x - (x - 20)}{(x-20)(12-x)} \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{-2x + 32}{(x-20)(12-x)} \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{-2(x-16)}{(x-20)(-x+12)} \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-16)}{(x-20)(x-12)} \le 0$$

Sejam $A = x - 16$, $B = x - 20$ e $C = x - 12$. Fazendo o quadro de sinais:

	12		16		20	
A	−		−		+	+
B	−		−		−	+
C	−		+		+	+
$\frac{A}{BC}$	−		+		−	+

A quantidade de números inteiros e estritamente positivos que satisfazem a sentença é $12 - 1 + 20 - 16 = 15$.

Questão 22

Na seqüência de termo geral $a_n = 5n + \text{sen}\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, com $n \in \mathbb{N}^*$, a soma dos 20 primeiros termos de ordem ímpar é igual a

a) 1 800 b) 1 874 c) 1 896
d) 2 000 e) 2 024

alternativa D

Para $t \in Z$, $\text{sen}\left((2t-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left((2t+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + t\pi\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + t\pi\right) = 0$.

Logo $a_{2t-1} + a_{2t+1} = 5(2t-1) + 5(2t+1) = 20t$ e, portanto, a soma dos 20 primeiros termos de ordem ímpar da seqüência dada, $(a_1 + a_3) + (a_5 + a_7) + \ldots + (a_{37} + a_{39})$, é igual a $20 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + \ldots + 20 \cdot 19$.

Assim, $a_1 + a_3 + a_5 + a_9 + \ldots + a_{37} + a_{39}$ é a soma de uma PA com 10 termos, primeiro termo igual a $20 \cdot 1$ e último igual a $20 \cdot 19$. O valor pedido é, então, $\frac{(20 \cdot 1 + 20 \cdot 19) \cdot 10}{2} = 2\,000$.

Questão 23

Em 1996, uma indústria iniciou a fabricação de 6 000 unidades de certo produto e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 20% ao ano. Nessas condições, em que ano a produção foi igual ao triplo da de 1996?
(Dados: $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$)

a) 1998 b) 1999 c) 2000
d) 2001 e) 2002

alternativa E

Seja n o número de anos decorridos após 1996 para que a produção seja o triplo da de 1996. Então $6\,000 \cdot (1{,}2)^n = 3 \cdot 6\,000 \Leftrightarrow (1{,}2)^n = 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = \log_{1,2} 3 = \frac{\log 3}{\log 1{,}2} = \frac{\log 3}{\log 12 - \log 10} = \frac{\log 3}{2 \log 2 + \log 3 - 1}.$$

Usando as aproximações $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, $n = \frac{0{,}48}{2 \cdot 0{,}3 + 0{,}48 - 1} = 6$.

Assim o ano em que a produção foi igual ao triplo da de 1996 foi $1996 + 6 = 2002$.

Questão 24

Pretende-se dividir um salão de forma retangular em quatro salas, também retangulares, como mostra a figura abaixo.

A_1	A_2
A_3	A_4

Se A_1, A_2, A_3 e A_4 são as áreas das salas pretendidas e considerando que $A_1 + A_2 + A_3 = 36\ m^2$, $A_1 - A_2 = 12\ m^2$ e $A_3 = 2 \cdot A_2$, a área da quarta sala, em metros quadrados, é

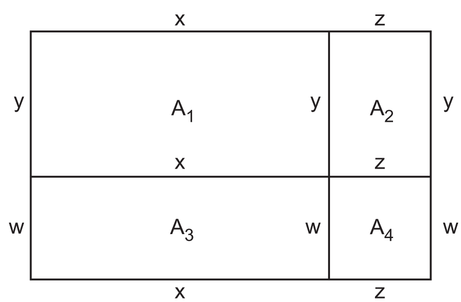
a) 4 b) 4,5 c) 4,8 d) 5 e) 5,5

alternativa A

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 36 \\ A_1 - A_2 = 12 \\ A_3 = 2A_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + 3A_2 = 36 \\ A_1 - A_2 = 12 \\ A_3 = 2A_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 18\ m^2 \\ A_2 = 6\ m^2 \\ A_3 = 12\ m^2 \end{cases}$$

Sejam x e y as dimensões do retângulo A_1, y e z as dimensões do retângulo A_2, x e w as dimensões do retângulo A_3 e z e w as dimensões do retângulo A_4.



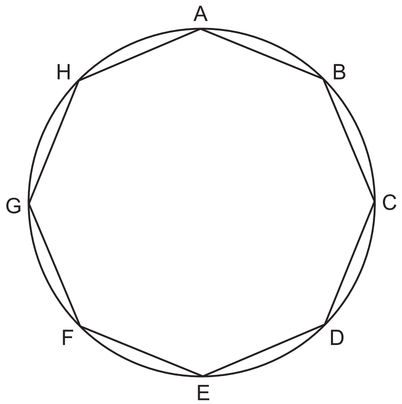
Logo:

$$\left|\begin{array}{l} xy = A_1 = 18 \\ yz = A_2 = 6 \\ xw = A_3 = 12 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} xy = 18 \\ (xw)(yz) = 6 \cdot 12 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 \cdot wz = 6 \cdot 12 \Leftrightarrow A_4 = 4\ m^2.$$

Questão 25

Na figura abaixo tem-se um octógono regular inscrito em uma circunferência



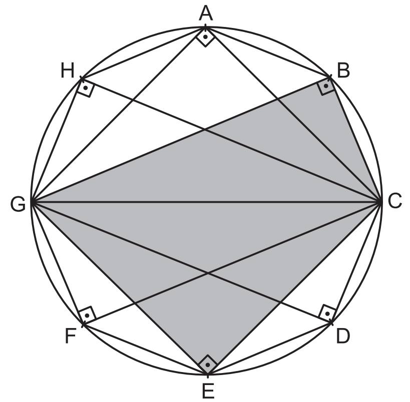
Selecionando-se aleatoriamente três vértices desse octógono, a probabilidade de que eles determinem um triângulo retângulo é

a) $\frac{9}{14}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{3}{14}$ e) $\frac{1}{7}$

alternativa C

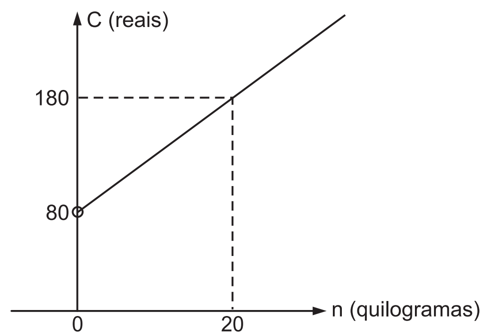
Para quaisquer três pontos escolhidos, o triângulo formado está inscrito na circunferência. Se esse triângulo é retângulo, um de seus lados é obrigatoriamente um diâmetro. Para cada um dos 4 diâmetros determinados por vértices do octógono regular, é possível construir 6 triângulos retângulos, conforme mostra a figura.

Assim, dentre os $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ *triângulos formados por vértices do octógono regular,* $4 \cdot 6 = 24$ *são retângulos. Portanto a probabilidade de pedida é igual a* $\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$.



Questão 26

A semi-reta representada no gráfico seguinte expressa o custo de produção C, em reais, de n quilos de certo produto.



Se o fabricante vender esse produto a R$ 102,00 o quilo, a sua porcentagem de lucro em cada venda será de

a) 25% b) 20% c) 18% d) 15% e) 14%

ver comentário

Seja C(n) o custo de produção, em reais, de n *quilogramas de certo produto. Então, pelo gráfico:*

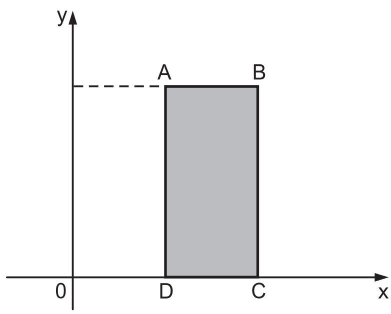
$$C(n) = \frac{180 - 80}{20 - 0} \cdot n + 80 \Leftrightarrow C(n) = 5n + 80$$

A quantia obtida na venda de n *quilogramas do produto é 102n. Portanto o lucro obtido é* $102n - 5n - 80 = 97n - 80$ *e, assim, a porcentagem de lucro sobre o custo é* $\frac{97n - 80}{5n + 80}$, *que é variável.*

Desse modo, não há alternativa correta.

Questão 27

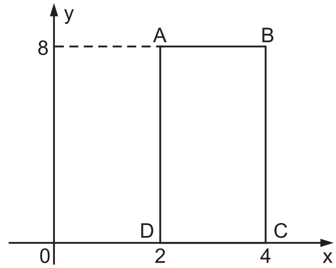
O retângulo ABCD seguinte, representado num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, é tal que A = (2;8), B = (4;8), C = (4;0) e D = (2;0).

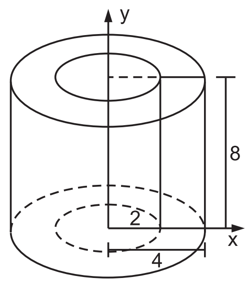


Girando-se esse retângulo em torno do eixo das ordenadas, obtém-se um sólido de revolução cujo volume é

a) 24π b) 32π c) 36π
d) 48π e) 96π

alternativa E





O volume do sólido obtido girando o retângulo ABCD em torno do eixo das ordenadas é igual ao volume de um cilindro de altura 8 e raio 4 menos o volume de um cilindro de altura 8 e raio 2, ou seja, $\pi \cdot 4^2 \cdot 8 - \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 96\pi$.