31. O valor da soma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ é:

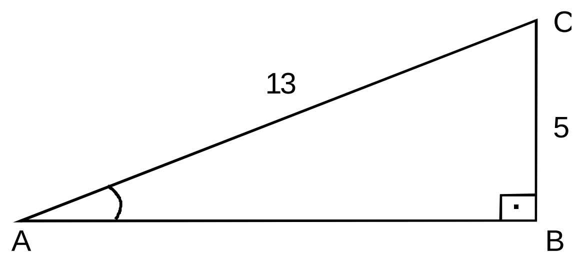
A) 5
B) 4
C) 3
D) 2
E) 1

Questão 31, alternativa D
Esta questão exige do candidato o conhecimento de soma de frações com denominadores diferentes.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2+1}{6}=\frac{12}{6}=2$$

32. Na figura ao lado, o triângulo ABC é retângulo em B. O cosseno do ângulo BÂC é:

A) $\frac{12}{13}$
B) $\frac{11}{13}$
C) $\frac{10}{13}$
D) $\frac{6}{13}$
E) $\frac{1}{13}$



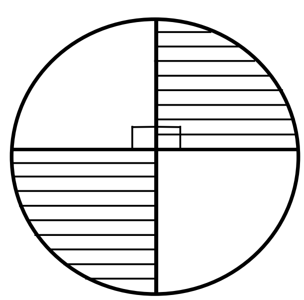
Questão 32, alternativa A

A questão visa medir o conhecimento das relações trigonométricas no triângulo retângulo bem como a Relação de Pitágoras.

Temos $\mathbf{AB}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$, de modo que $\mathbf{cos\,B\hat{A}C}=\frac{\mathbf{AB}}{13}=\frac{12}{13}$

33. Na figura ao lado, a razão entre o perímetro da região hachurada e o perímetro da circunferência é:

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{\pi+4}{4\pi}$
C) $\frac{\pi}{4}$
D) $\frac{\pi+4}{2\pi}$
E) 2



Questão 33, alternativa D

Exige do candidato o conhecimento do conceito de perímetro de uma figura e de perímetro de uma circunferência em função do raio.

O perímetro da região hachurada é $4\mathbf{R}+\pi\mathbf{R}$ e o perímetro da circunferência é $2\pi\mathbf{R}$, onde R é o raio da circunferência. Logo a razão é $\dfrac{4\mathbf{R}+\pi\mathbf{R}}{2\pi\mathbf{R}}=\dfrac{4+\pi}{2\pi}=\dfrac{\pi+4}{2\pi}$.

34. Numa sala há 100 pessoas, das quais 97 são homens. Para que os homens representem 96% das pessoas contidas na sala, deverá sair que número de homens?

A) 2
B) 5
C) 10
D) 15
E) 25

Questão 34, alternativa E

Requer do candidato a noção de percentagem bem como a habilidade em traduzir as informações em equações matemáticas.
Se x homens saem da sala, restam 100 – x pessoas, das quais 97 – x são homens. Então, $97-\mathbf{x}$ equivale a 96% de $100-\mathbf{x}$. Logo, $97-\mathbf{x}=\dfrac{96}{100}(100-\mathbf{x})$ ou $9700-100\mathbf{x}=9600-96\mathbf{x}$, donde se conclui que $100=4\mathbf{x}$ ou x = 25.

35. O valor exato de $\sqrt{32+10\sqrt{7}}+\sqrt{32-10\sqrt{7}}$ é:

A) 12
B) 11
C) 10
D) 9
E) 8

Questão 35, alternativa C

Visa medir a habilidade do candidato em manipular expressões numéricas envolvendo radicais e o conhecimento de produtos notáveis fundamentais.

1ª Solução: Pondo $x = \sqrt{32+10\sqrt{7}} + \sqrt{32-10\sqrt{7}}$, temos $x > 0$ e

$$x^2 = \left(\sqrt{32+10\sqrt{7}} + \sqrt{32-10\sqrt{7}}\right)^2$$
$$x^2 = 32+10\sqrt{7} + 2\sqrt{32+10\sqrt{7}}\,.\sqrt{32-10\sqrt{7}} + 32-10\sqrt{7}$$
$$x^2 = 64 + 2\sqrt{1024-700}$$
$$x^2 = 64 + 2\sqrt{324} = 100$$

Como x é positivo, então, $x = 10$.

2ª Solução: Observando que $32 = 5^2 + 7$, então,

$$32+10\sqrt{7} = 5^2 + 2.5.\sqrt{7} + 7 = \left(5+\sqrt{7}\right)^2$$

Analogamente, $32-10\sqrt{7} = \left(5-\sqrt{7}\right)^2$.

Portanto, $\sqrt{32+10\sqrt{7}} + \sqrt{32-10\sqrt{7}} = 5+\sqrt{7}+5-\sqrt{7} = 10$.

36. Sabendo que $\mathbf{i}^2 = -1$ e que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, o número complexo $\dfrac{\cos\theta + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\theta}{\cos\theta - \mathbf{i}\,\text{sen}\,\theta}$ é igual a:

A) $\cos(2\theta) + \mathbf{i}\,\text{sen}(2\theta)$

B) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$

C) $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \mathbf{i}\,\text{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

D) $\dfrac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$

E) $\cos(\theta^2) + \mathbf{i}\,\text{sen}(\theta^2)$

Questão 36, alternativa A

Requer do candidato o conhecimento de noções básicas sobre números complexos: conjugado de um número complexo, relação de Euler.

Temos $\dfrac{\cos\theta + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\theta}{\cos\theta - \mathbf{i}\,\text{sen}\,\theta} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = \dfrac{e^{i\theta}e^{i\theta}}{e^{-i\theta}e^{i\theta}} = \dfrac{e^{i2\theta}}{1} = e^{i2\theta} = \cos(2\theta) + \mathbf{i}\,\text{sen}(2\theta)$

37. Considere a reta **r** cuja equação é $\mathbf{y} = 3\mathbf{x}$. Se $\mathbf{P_o}$ é o ponto de **r** mais próximo do ponto $\mathbf{Q(3,3)}$ e $\mathbf{d}$ é a distância de $\mathbf{P_o}$ a $\mathbf{Q}$, então $\mathbf{d}\sqrt{10}$ é igual a:

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

Questão 37, alternativa D

Noções básicas de geometria analítica plana: equação de uma reta, fórmula da distância de um ponto a uma reta.

A distância de um ponto Q(m, n) à reta ax + by + c = 0) é dada pela fórmula:

$\mathbf{d} = \dfrac{|\mathbf{am} + \mathbf{bn} + \mathbf{c}|}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}}$. Aplicada ao ponto Q(3, 3) e à reta 3x – y = 0, obtemos:

$\mathbf{d} = \dfrac{|3.3 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{10}}$. Portanto $\mathbf{d}\sqrt{10} = 6$

38. O valor da soma $\mathbf{log}_{10}\dfrac{1}{2} + \mathbf{log}_{10}\dfrac{2}{3} + \mathbf{log}_{10}\dfrac{3}{4} + \mathbf{...} + \mathbf{log}_{10}\dfrac{99}{100}$ é:

A) 0
B) –1
C) –2
D) 2
E) 3

Questão 38, alternativa C

Requer do candidato o conhecimento de noções básicas sobre logaritmos e suas propriedades. Temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{log}_{10}\frac{1}{2} + \mathbf{log}_{10}\frac{2}{3} + \mathbf{...} + \mathbf{log}_{10}\frac{99}{100} \\ &= \mathbf{log}_{10}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\mathbf{...}\cdot\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100}\right] \\ &= \mathbf{log}_{10}\frac{1}{100} = \mathbf{log}_{10}10^{-2} = -2 \end{aligned}$$

39. Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices, então, o número de faces triangulares é:

A) 12
B) 11
C) 10
D) 9
E) 8

Questão 39, alternativa E

A Fórmula de Euler para Poliedros Convexos afirma que $V + F = A + 2$, onde V é o número de vértices, F é o número de faces e A é o número de arestas. Como A = 20,
V = 10, então, F = 12. O poliedro tem 12 faces.
Se T é o número de faces triangulares e Q é o número de faces quadrangulares, então,
$\mathbf{T} + \mathbf{Q} = 12$ e $A = \dfrac{3\mathbf{T}+4\mathbf{Q}}{2}$, pois cada face triangular contribui com 3 arestas, e cada face quadrangular contribui com 4 arestas e cada aresta é comum a duas faces.
Portanto, temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} \mathbf{T}+\mathbf{Q}=12 \\ 3\mathbf{T}+4\mathbf{Q}=40 \end{cases}$$ cuja solução é $\mathbf{T} = 8$ e $\mathbf{Q} = 4$

40. A soma dos inteiros que satisfazem a desigualdade $|\mathbf{x}-7| > |\mathbf{x}+2| + |\mathbf{x}-2|$ é:

A) 14
B) 0
C) –2
D) –15
E) –18

Questão 40, alternativa E

Requer habilidade no trato com desigualdades, função módulo e apreciação de casos.
Consideremos os seguintes casos:

Caso I: x < -2; Caso II: -2 ≤ x < 2; Caso III: 2 ≤ x < 7; Caso IV: 7 ≤ x

No **Caso I**

$$|\mathbf{x}-7| > |\mathbf{x}+2| + |\mathbf{x}-2|$$
$$-\mathbf{x}+7 > -\mathbf{x}-2-\mathbf{x}+2$$
$$7 > -\mathbf{x}$$
$$-7 < \mathbf{x}$$

Logo - 7 < x < -2, de modo que as soluções inteiras são -6, -5, -4, -3.

No **Caso II**

$$|\mathbf{x}-7| > |\mathbf{x}+2| + |\mathbf{x}-2|$$
$$-\mathbf{x}+7 > \mathbf{x}+2-\mathbf{x}+2$$
$$3 > \mathbf{x}$$

A soluções inteiras são -2, -1, 0, 1.

No **Caso III**

$$|\mathbf{x}-7| > |\mathbf{x}+2| + |\mathbf{x}-2|$$
$$-\mathbf{x}+7 > \mathbf{x}+2+\mathbf{x}-2$$
$$7 > 3\mathbf{x}$$
$$\mathbf{x} < 7/3$$

A solução inteira é 2.

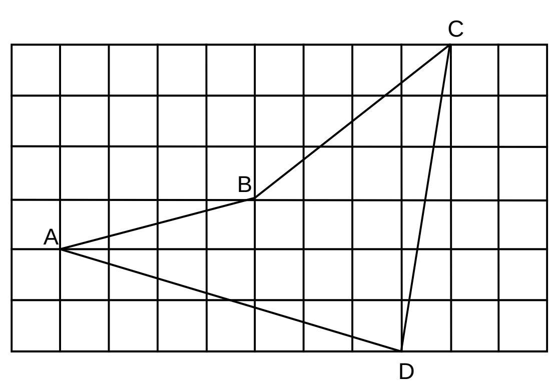
No **Caso IV**

$$|\mathbf{x}-7| > |\mathbf{x}+2| + |\mathbf{x}-2|$$
$$\mathbf{x}-7 > \mathbf{x}+2+\mathbf{x}-2$$
$$-7 > \mathbf{x}$$

Não há soluções nesse caso.
A soma de todas as soluções inteiras é $-6-5-4-3-2-1+0+1+2=-18$

41. Na figura ao lado, cada quadradinho da malha tem lado 1. A área do quadrilátero ABCD é:

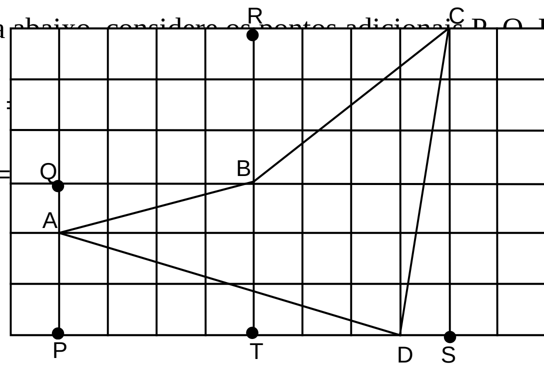
A) 18
B) 19
C) 20
D) 21
E) 22



Questão 41, alternativa A

Área de retângulos e triângulos.

Na figura abaixo, considere os pontos adicionais P, Q, R, S e T. Tem-se:



$|\mathbf{ABCD}| = \ldots \mathbf{D}| - |\mathbf{ADP}|$

$= \ldots - 2 - 6 - 3 - 7 = 36 - 18 = 18$

42. O valor de **a** para que a igualdade matricial $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ seja verdadeira é:

A) 1
B) 2
C) 0
D) –2
E) –1

Questão 42, alternativa B

Questão que exige apenas o conhecimento das operações básicas com matrizes.

Temos $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2+\mathbf{a} \\ 0 & -1+\mathbf{a} \end{bmatrix}$.

Por igualdade de matrizes, obtém-se:

$-2 + \mathbf{a} = 0$, donde segue que $\mathbf{a} = 2$.

43. O número máximo de pontos de interseção entre 10 circunferências distintas é:

A) 100
B) 90
C) 45
D) 32
E) 20

Questão 43, alternativa B

Conceitos básicos de contagem.
Duas circunferências distintas se cortam em, no máximo, dois pontos distintos.
Portanto, o número máximo de pontos de interseção de 10 circunferências distintas é:

$$2.C_{10,2} = 2.\binom{10}{2} = 2.\frac{10.9}{2!} = 90$$

44. Considere a função $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{cx}}{\mathbf{dx}+3}$, definida para todo número real **x** tal que $\mathbf{dx}+3 \neq 0$, onde **c** e **d** são constantes reais. Sabendo que $\mathbf{f(f(x)) = x}$ e $\mathbf{f}^{(5)}(3) = \mathbf{f(f(f(f(f(}3\mathbf{)))))} = -\dfrac{3}{5}$, podemos afirmar que $\mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2$ é igual a:

A) 5
B) 25
C) 61
D) 113
E) 181

Questão 44, alternativa B

Conceitos básicos sobre funções reais de uma variável real: domínio, conjuntos de valores, composição.

Da condição $\mathbf{f(f(x)) = x}$, obtemos $\dfrac{\mathbf{c}\left(\dfrac{\mathbf{cx}}{\mathbf{dx}+3}\right)}{\mathbf{d}\left(\dfrac{\mathbf{cx}}{\mathbf{dx}+3}\right)+3} = \mathbf{x}$ ou $(\dfrac{\mathbf{c}^2\mathbf{x}}{\mathbf{dx}+3})(\dfrac{\mathbf{dx}+3}{\mathbf{dcx}+3\mathbf{dx}+9}) = \mathbf{x} \Rightarrow$

$\mathbf{c}^2 = \mathbf{d}(\mathbf{c}+3)\mathbf{x}+9$

Como a última igualdade é válida para todo x tal que dx + 3 ≠ 0, temos d(c+3) = 0 e $\mathbf{c}^2$ = 9. Temos as possibilidades: (I) d = 0 e c = 3 ou (II) c = -3 e d qualquer.

A segunda condição do problema é $\mathbf{f}^{(5)}(3) = -\dfrac{3}{5}$. Como $\mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, temos que $\mathbf{f}^{(5)}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, de modo que $\mathbf{f}(3) = -\dfrac{3}{5}$. Se fosse d = 0 e c = 3, teríamos $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ e $\mathbf{f}(3) = -\dfrac{3}{5}$ não ocorreria. Logo, dever ser c = - 3. Das igualdades $\mathbf{f}(3) = \dfrac{-3.3}{3\mathbf{d}+3} = \dfrac{-3}{5}$ segue que d = 4. Portanto, $\mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2 = (-3)^2 + 4^2 = 25$.

OUTRA SOLUÇÃO: Da igualdade $\mathbf{f}(\mathbf{f}(3)) = 3$**,** obtemos

$$\mathbf{f}^{(5)}(3) = \mathbf{f}(3) = \frac{3\mathbf{c}}{3\mathbf{d}+3} = -\frac{3}{5}. \qquad \text{(I)}$$

De $\mathbf{f}(3) = -\dfrac{3}{5}$, obtemos $\mathbf{f}\left(-\dfrac{3}{5}\right) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(3)) = 3$. Logo,

$$\frac{-\frac{3}{5}\mathbf{c}}{-\frac{3}{5}\mathbf{d}+3} = 3 \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II), obtemos o sistema de equações $\begin{cases} 15\mathbf{c}+9\mathbf{d} = -9 \\ -3\mathbf{c}+9\mathbf{d} = 45 \end{cases}$ cuja solução $\mathbf{c} = -3$ e $\mathbf{d} = 4$.

Portanto, $\mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2 = (-3)^2 + 4^2 = 25$

45. Se a expressão $\dfrac{2\mathbf{x}+5}{4\mathbf{x}^2-1} = \dfrac{\mathbf{a}}{2\mathbf{x}+1} + \dfrac{\mathbf{b}}{2\mathbf{x}-1}$, onde **a** e **b** são constantes, é verdadeira para todo número real $\mathbf{x} \neq \pm 1/2$, então o valor de $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ é:

A) –2
B) –1
C) 1
D) 2
E) 3

Questão 45, alternativa C

Requer conhecimento de fatoração de expressões algébricas.

Temos $\frac{\mathbf{a}}{2\mathbf{x}+1}+\frac{\mathbf{b}}{2\mathbf{x}-1}=\frac{\mathbf{a}(2\mathbf{x}-1)+\mathbf{b}(2\mathbf{x}+1)}{(2\mathbf{x}+1)(2\mathbf{x}-1)}=\frac{2(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{x}+\mathbf{b}-\mathbf{a}}{4\mathbf{x}^2-1}$.

Portanto, $\frac{2\mathbf{x}+5}{4\mathbf{x}^2-1}=\frac{2(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{x}+\mathbf{b}-\mathbf{a}}{4\mathbf{x}^2-1}$, expressão que é válida para todo $x \neq \pm 1/2$.

Logo, $2\mathbf{x}+5=2(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{x}+\mathbf{b}-\mathbf{a}$, para todo $x \neq \pm 1/2$, donde concluímos que $\mathbf{a}+\mathbf{b}=1$.