Gabarito - Matemática - Grupos I/J

1ª QUESTÃO: (1,0 ponto) Avaliador Revisor

Para a estréia de um espetáculo foram emitidos 1800 ingressos, dos quais 60% foram vendidos até a véspera do dia de sua realização por um preço unitário de R$ 45,00.

Considerando que todos os ingressos emitidos serão vendidos, por quanto cada ingresso deverá ser vendido no dia do espetáculo para que a arrecadação total, com a venda dos ingressos, seja de R$ 88.200,00?

Cálculos e respostas:

Até a véspera do dia da realização do espetáculo foram vendidos $\frac{60}{100} \times 1800 = 1080$ ingressos e o total arrecadado foi de 1080 x 45 = 48600.

Para que a arrecadação total seja de R$ 88.200,00 , no último dia a arrecadação deve ser de R$ 39.600,00.

O valor de venda de cada ingresso no dia do espetáculo deverá ser:

$$\frac{39.600}{1.800 - 1.080} = \frac{39.600}{720} = 55$$

Portanto, cada ingresso deverá ser vendido por R$ 55,00.

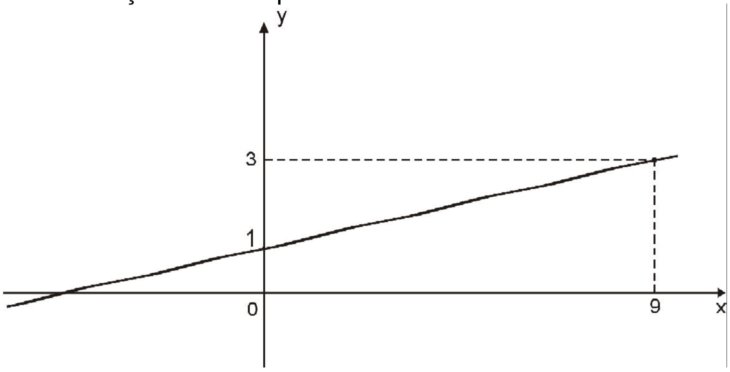
Gabarito - Matemática - Grupos I/J

2ª QUESTÃO: (1,0 ponto) Avaliador Revisor

Sejam f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva e g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \log_{10} f(x).$$

O gráfico de g é a reta da figura.



a) Determine a equação da reta da figura.

b) Calcule $f\left(\frac{9}{2}\right)$.

c) Encontre uma expressão para f(x).

Cálculos e respostas:

a) A reta da figura contém os pontos (0,1) e (9,3).

Logo, sua equação é

$$y - 1 = \frac{2}{9}(x - 0) \iff y = \frac{2}{9}x + 1$$

b) $f\left(\frac{9}{2}\right) = 10^{g\left(\frac{9}{2}\right)}$

Porém , $g\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{2}{9} \times \frac{9}{2} + 1 = 2$

Logo, $f\left(\frac{9}{2}\right) = 10^{2} = 100$

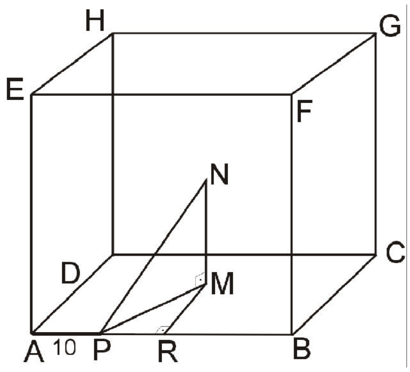
c) $f(x) = 10^{g(x)} = 10^{\frac{2}{9}x + 1}$

Gabarito - Matemática - Grupos I/J

3ª QUESTÃO: (1,5 ponto) Avaliador Revisor

Considere o cubo ABCDEFGH de aresta medindo 40 cm.
Seja P um ponto da aresta AB do cubo, que está localizado a 10 cm do vértice A.
Calcule a distância do ponto P ao ponto de interseção das diagonais do cubo.

Cálculos e respostas:



Sejam N o ponto de interseção das diagonais do cubo, M o encontro das diagonais do retângulo ABCD e R o ponto médio do lado AB. Queremos calcular a medida do segmento NP.

Temos que $\overline{PR} = 10$ cm e $\overline{MR} = 20$ cm.

O triângulo MPR é retângulo. Logo, $\overline{MP}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RM}^2 = 100 + 400 = 500$

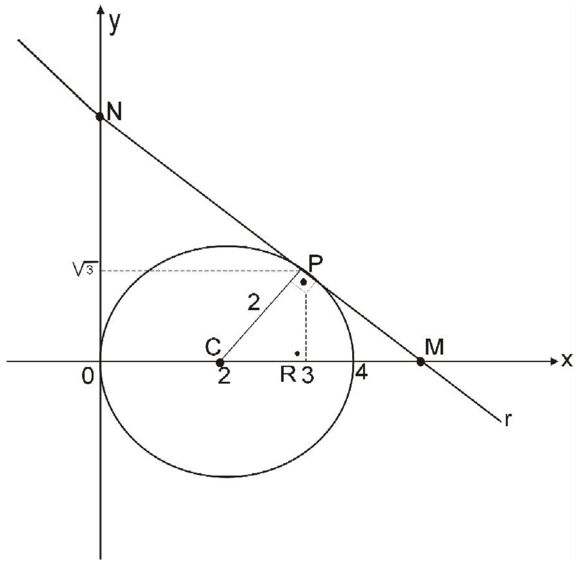
O triângulo NMP também é retângulo. Portanto,

$$\overline{NP}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{MN}^2 \Leftrightarrow \overline{NP}^2 = 500 + 400 \Leftrightarrow \overline{NP}^2 = 900 \Rightarrow \overline{NP} = 30 \text{ cm}$$

4ª QUESTÃO: (1,5 ponto) Avaliador Revisor

Considere **r** a reta tangente à circunferência de equação $(x-2)^2 + y^2 = 4$, no ponto $P = (3, \sqrt{3})$.
Sejam M e N os pontos de interseção de **r** com os eixos coordenados e O = (0,0).
Calcule a área do triângulo OMN.

Cálculos e respostas:



Os triângulos CRP e CPM são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{CP}} \Leftrightarrow \frac{2}{\overline{CM}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{CM} = 4.$$

Assim, $\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM} = 6$.

Os triângulos MRP e MON também são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{RM}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{RP}}{\overline{ON}} \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{\sqrt{3}}{\overline{ON}} \Leftrightarrow \overline{ON} = 2\sqrt{3}.$$

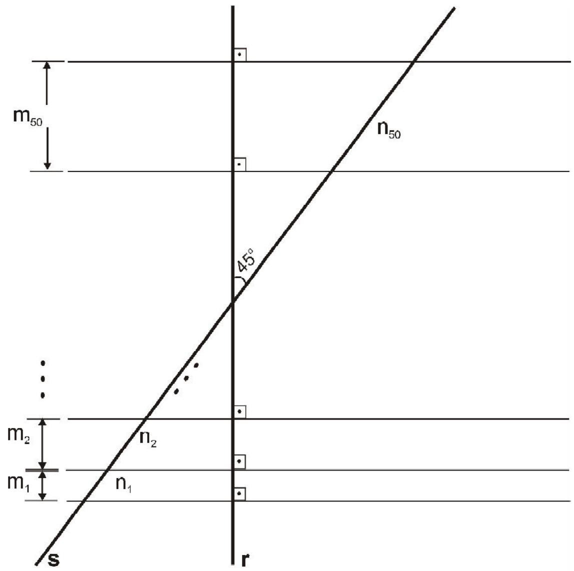
Portanto, a área do triângulo OMN é igual a

$$\frac{\overline{OM} \times \overline{ON}}{2} = \frac{6 \times 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Gabarito - Matemática - Grupos I/J

5ª QUESTÃO: (1,5 ponto) Avaliador Revisor

Considere **r** e **s** duas retas concorrentes formando entre si um ângulo de **45º** .
Traçam-se **51** retas perpendiculares à reta **r**, que determinam sobre **r** segmentos de comprimentos $m_1, m_2, ..., m_{50}$ e sobre **s** segmentos de comprimentos $n_1, n_2, ..., n_{50}$ (veja a figura).



Sabendo que $m_1, m_2, ..., m_{50}$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 1 cm e que m_1 = 1 cm , calcule o valor da soma $n_1 + n_2 + ... + n_{50}$.

Cálculos e respostas:

Temos que

$M_{50} = m_1 + 49 \times 1 = 1 + 49 \times 1 = 50.$

Também,

$$\frac{m_1}{n_1} = \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Seja $S = n_1 + n_2 + ... + n_{50}$.

Assim,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = ... = \frac{m_{50}}{n_{50}} = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_{50}}{S} = \frac{(1+50)\frac{50}{2}}{S}$$

Logo,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{51 \times 25}{S} \Leftrightarrow S = \frac{2 \times 51 \times 25}{\sqrt{2}} = 1275\sqrt{2}$$

Gabarito - Matemática - Grupos I/J

6ª QUESTÃO: (1,5 ponto) Avaliador Revisor

Determine todos os valores possíveis de $m \in \mathbb{R}$, de modo que o polinômio

$$p(x) = x^3 + (m-1)x^2 + (4-m)x - 4$$

tenha três raízes distintas, sendo x = 1 a única raiz real.

Cálculos e respostas:

Se x = 1 é a única raiz real de p(x), então as outras duas raízes são complexas.

Divisão de p(x) por (x – 1) :

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & m-1 & 4-m & -4 \\ \hline 1 & 1 & m & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Assim,

$P(x) = (x-1)(x^2 + mx + 4)$.

Para que as outras duas raízes de p(x) sejam complexas, devemos ter

$$m^2 - 4.1.4 < 0 \iff m^2 < 16 \iff -4 < m < 4$$

Gabarito - Matemática - Grupos I/J

7ª QUESTÃO: (1,0 ponto) Avaliador Revisor

Considere o conjunto S = {1, 2, 3, 8, 9}.

Seja M o conjunto de todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados com os elementos de S.

a) Determine o número de elementos de M.

b) Escolhendo-se, ao acaso, um elemento de M, qual a probabilidade de o elemento escolhido ser um múltiplo de 3?

Cálculos e respostas:

a) Número de elementos de M: $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

b) Para que um elemento de M seja múltiplo de 3, a soma dos algarismos deve ser divisível por 3. Assim, o número de casos favoráveis são:

com algarismos 1, 2 e 3 - P_3
com algarismos 1, 2 e 9 - P_3
com algarismos 1, 3 e 8 - P_3
com algarismos 1, 8 e 9 - P_3

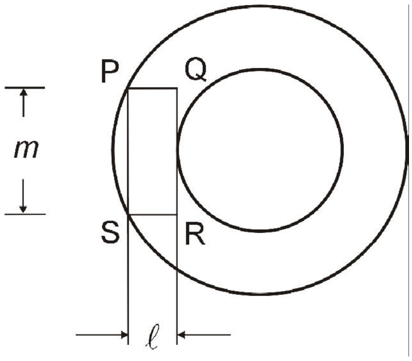
$4 \times P_3 = 4 \times 6 = 24$

Logo, a probabilidade de o elemento escolhido ser um múltiplo de 3 é igual a $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.

Gabarito - Matemática - Grupos I/J

8ª QUESTÃO: (1,0 ponto) Avaliador Revisor

Na figura abaixo, o retângulo PQRS, cujos lados medem ℓ e m, está situado entre duas circunferências concêntricas de diâmetros iguais a 6 cm e 10 cm. Os pontos P e S pertencem à circunferência maior e o segmento QR é tangente à circunferência menor.

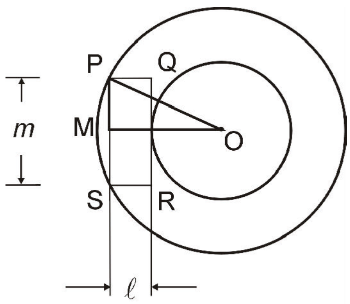


a) Escreva a expressão de m em função de ℓ.

b) Determine o valor de m para $\ell = 2$ cm.

Cálculos e respostas:

a)



Sejam O o centro das circunferências e M o ponto médio de PS.

Da figura, temos

$$\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MP}^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3 + \ell + \left(\frac{m}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} = 25 - (3+\ell)^2 \Rightarrow m^2 = 100 - 4(3+\ell)^2 \Rightarrow$$

$$m = \sqrt{100 - 4(3+\ell)^2} = 2\sqrt{16 - 6\ell - \ell^2}\ , 0 \leq \ell \leq 2$$

b) $\ell = 2 \Rightarrow m = 0$