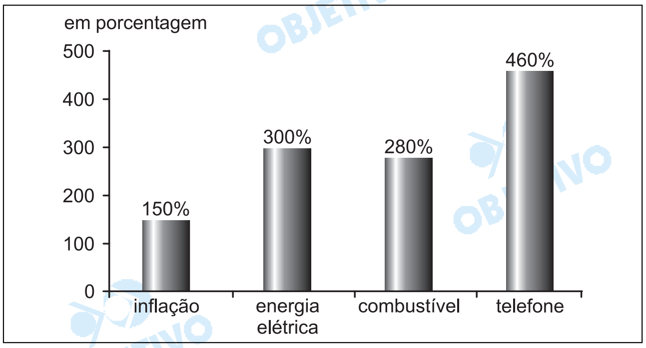
MATEMÁTICA

22

O gráfico mostra, em valores aproximados, a inflação medida pelo IPCA de 1º.07.1994 a 31.05.2003 e alguns itens de consumo da classe média que tiveram um aumento maior que a inflação.

(IBGE e revista *Veja*.)



Em junho de 1994, uma pessoa que ganhava um salário de R$ 1.000,00 gastou no mês, com energia elétrica, combustível e telefone, R$ 50,00, R$ 30,00 e R$ 60,00, respectivamente. Supondo que, de 1º.07.1994 a 31.05.2003, o salário dessa pessoa foi reajustado de acordo com os índices de inflação e que a pessoa continuou consumindo as mesmas quantidades de energia elétrica, combustível e telefone, determine:

a) o salário dessa pessoa em 31 de maio de 2003, e quanto ela gastou, em reais, com cada um dos itens energia elétrica, combustível e telefone nesse mês, considerando-se os índices mostrados no gráfico.

b) a porcentagem total do seu salário comprometida com energia elétrica, combustível e telefone em junho de 1994 e em maio de 2003.

Resolução

a) O salário dessa pessoa em 31 de maio de 2003 era R$ 1000,00 . 2,5 = R$ 2500,00.

b) I) O gasto mensal com energia elétrica, combustível e telefone em julho de 1994 era R$ 50,00 + R$ 30,00 + R$ 60,00 = R$ 140,00. A porcentagem total do seu salário, comprometida com energia elétrica, combustível e telefone era,

pois $\dfrac{140}{1000} = \dfrac{14}{100} = 14\%$

II) O gasto, em maio de 2003, com energia elétrica, combustível e telefone era

R$ 50,00 . 4 + R$ 30,00 . 3,8 + R$ 60,00 . 5,6 =
= R$ 200,00 + R$ 114,00 + R$ 336,00 = R$ 650,00

A porcentagem total do salário comprometida em maio de 2003, com esses três gastos, era

$\dfrac{650}{2500} = 0{,}26 = 26\%$

Respostas:

a) R$ 2500,00 (salário), R$ 200,00 com energia elétrica, R$ 114,00 com combustível e R$ 336,00 com telefone.

b) 14% em junho de 1994; 26% em maio de 2003

23

Numa festa de aniversário infantil, 5 crianças comeram um alimento contaminado com uma bactéria. Sabe-se que, uma vez em contato com essa bactéria, a probabilidade de que a criança manifeste problemas intestinais é de 2/3.

Sabendo que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, determine:

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ e a probabilidade de manifestação de problemas intestinais em exatamente duas crianças.

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ e a probabilidade de manifestação de problemas intestinais no máximo em uma criança.

Resolução

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5 \,.\, 4 \,.\, 3!}{2 \,.\, 1 \,.3!} = 10$

A probabilidade de manifestação de problemas intestinais em extamente duas crianças é

$$p = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} . \left(\frac{2}{3}\right)^2 . \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 10 \,.\, \frac{4}{9} \,.\, \frac{1}{27} = \frac{40}{243}$$

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{0!(5-0)!} = \dfrac{5!}{0!5!} = 1$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{1!(5-1)!} = \dfrac{5!}{1!4!} = 5$

A probabilidade de manifestação de problemas intestinais no máximo em uma criança é

$$p = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} . \left(\frac{2}{3}\right)^0 . \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} . \left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^4 =$$

$$= 1 \,.\, 1 \,.\, \frac{1}{243} + 5 \,.\, \frac{2}{3} \,.\, \frac{1}{81} = \frac{1}{243} + \frac{10}{243} = \frac{11}{243}$$

Respostas: *a)* $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$ *e* $p = \dfrac{40}{243}$

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$ *e* $p = \dfrac{11}{243}$

24

A expressão $V(x) = x(16 - 2x)(24 - 2x)$ representa o volume em cm^3 de uma caixa na forma de um paralelepípedo retângulo reto, em que x é a altura e os lados da base são 16 – 2x e 24 – 2x.

a) Se nenhuma das arestas da caixa pode ser menor que 1 cm, determine os valores possíveis da variável x.

b) Quando $x = 5$ cm, o volume da caixa é 420 cm^3. Investigue se existem outros valores de x para os quais o volume é 420 cm^3. Em caso afirmativo, dê esses valores.

Resolução

a) *Para que nenhuma das arestas da caixa tenha medida menor que 1 cm, deve-se ter simultaneamente*

$$\begin{cases} x \geq 1 \ (I) \\ 16 - 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{15}{2} \ (II) \\ 24 - 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{23}{2} \ (III) \end{cases}$$

de (I), (II) e (III) conclui-se que $1 \leq x \leq \dfrac{15}{2}$

b) *Para que o volume da caixa seja igual a 420 cm*^{3}*, deve-se ter:*

$$\begin{cases} x > 0 \\ 16 - 2x > 0 \\ 24 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 8 \text{ e}$$

$x(16 - 2x)(24 - 2x) = 420 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^3 - 80x^2 + 384x - 420 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 - 20x^2 + 96x - 105 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 5)(x^2 - 15x + 21) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ ou } x^2 - 15x + 21 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = \dfrac{15 - \sqrt{141}}{2}$, *pois*

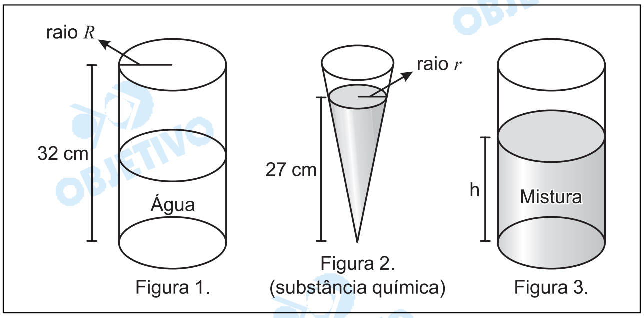
$\dfrac{15 + \sqrt{141}}{2} \notin \,]0;8[$

Respostas: a) $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $1 \leq x \leq \dfrac{15}{2}$

b) *Para* $x = \dfrac{15 - \sqrt{141}}{2}$ *o volume do paralelepípedo também é 420 cm*^{3}*.*

25

Um recipiente, na forma de um cilindro circular reto de raio R e altura 32 cm, está até à metade com água (figura 1). Outro recipiente, na forma de um cone circular reto, contém uma substância química que forma um cone de altura 27 cm e raio r (figura 2).



a) Sabendo que $R = (3/2)r$, determine o volume da água no cilindro e o volume da substância química no cone, em função de r. (Para facilitar os cálculos, use a aproximação $\pi = 3$.)

b) A substância química do cone é despejada no cilindro, formando uma mistura homogênea (figura 3). Determine a concentração (porcentagem) da substância química na mistura e a altura h atingida pela mistura no cilindro.

Resolução

Sejam V_1 e V_2, respectivamente, os volumes de líquidos no cilindro da figura 1 e no cone da figura 2 e V o volume final após a mistura.

a) $$V_1 = \frac{1}{2} \,.\, \pi \,.\, R^2 \,.\, 32 = 16 \,.\, 3 \,.\, \left(\frac{3}{2}\, r\right)^2 = 108\, r^2$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \,.\, \pi \,.\, r^2 \,.\, 27 = 9 \,.\, 3 \,.\, r^2 = 27\, r^2$$

b) $$\left.\begin{array}{l} V = \pi.R^2.h = \pi \,.\left(\frac{3}{2} r\right)^2 h = 3 .\frac{9}{4}\, r^2 h = \frac{27 r^2 h}{4} \\ V = V_1 + V_2 = 108 r^2 + 27 r^2 = 135 r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{27 r^2 h}{4} = 135\, r^2 \Rightarrow h = 20$$

A concentração C da substância química na mistura final é

$$C = \frac{27\, r^2}{135\, r^2} = \frac{1}{5} = 0{,}20 = 20\%$$

Respostas: *a) O volume da água no cilindro é $108\, r^2$ e o volume da substância química no cone é $27\, r^2$.*
b) C = 20% (concentração) e h = 20 cm