MATEMÁTICA

1

Um jogo consiste num dispositivo eletrônico na forma de um círculo dividido em 10 setores iguais numerados, como mostra a figura.

Em cada jogada, um único setor do círculo se ilumina. Todos os setores com números pares têm a mesma probabilidade de ocorrer, o mesmo acontecendo com os setores com números ímpares. Além disso, a probabilidade de ocorrer o número 3 é o dobro da probabilidade de ocorrer o número 4. Denotando por $p(i)$ a probabilidade de, numa jogada, ocorrer o número i, determine:

a) $p(3)$ e $p(4)$.

b) a probabilidade de, numa jogada, ocorrer um número primo maior ou igual a 2.

Resolução

Sendo p(ímpar) e p(par), respectivamente, a probabilidade de ocorrer um número ímpar e um número de par, numa jogada, temos:

$$\begin{cases} p(\text{ímpar}) + p(\text{par}) = 1 \\ p(\text{ímpar}) = 2p(\text{par}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(\text{ímpar}) = \frac{2}{3} \\ p(\text{par}) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

a) $p(3) = \frac{1}{5} \cdot p(\text{ímpar}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$

$$p(4) = \frac{1}{5} \cdot p(\text{par}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

b) A probabilidade de, numa jogada, ocorrer um número primo maior ou igual a 2 é

$$p = p(2) + p(3) + p(5) + p(7) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) =$$

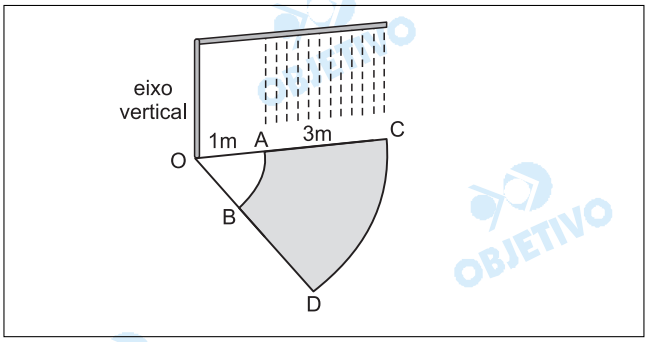
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{15}$$

Respostas: *a)* $p(3) = \frac{2}{15}$ *e* $p(4) = \frac{1}{15}$

b) $\frac{7}{15}$

2

A figura mostra um sistema rotativo de irrigação sobre uma região plana, que gira em torno de um eixo vertical perpendicular à região. Se denotarmos a medida em radianos do ângulo AÔB por θ, a área irrigada, representada pela parte cinza do setor circular, será uma função A, que dependerá do valor de θ, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



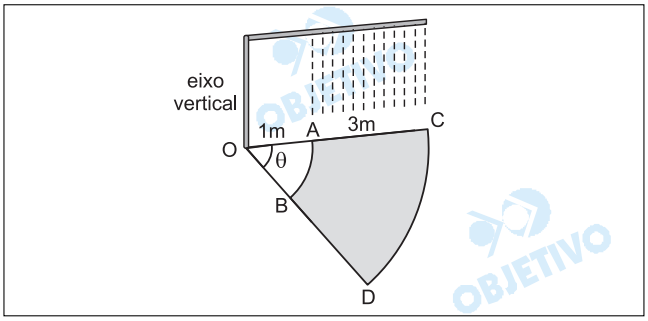
Se *OA* = 1 m e *AC* = 3 m, determine:

a) a expressão matemática para a função *A*(θ).

b) o valor de θ, *em graus*, se a área irrigada for de 8 m^2.

(Para facilitar os cálculos, use a aproximação $\pi = 3$.)

Resolução



a) 1) A área S_{OAB} do setor circular OAB é tal que

$$S_{OAB} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi \, 1^2 = \frac{\theta}{2}$$

2) A área S_{OCD} do setor circular OCD é tal que

$$S_{OCD} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi \, 4^2 = 8\theta$$

3) A expressão matemática para a função que fornece a área irrigada, em metros quadrados, é:

$A(\theta) = 8\theta - \frac{\theta}{2} = \frac{15\theta}{2}$, *com* θ *em radianos e* $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

b) $A(\theta) = 8 = \frac{15\theta}{2} \Rightarrow \theta = \frac{16}{15}$ *rad.*

Em graus, tem-se:

$$\theta = \frac{16}{15} \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{16}{15} \cdot \frac{180°}{3} = 64°$$

Respostas: a) $A(\theta) = \frac{15\theta}{2}$

b) 64°

3

Considere os números complexos w = 2i e z = (1 + i). Determine:

a) z^2 e ($w^2 . \overline{z} + w$), onde $\overline{z}$ indica o conjugado de z.

b) |z| e |w|. Mostre que a seqüência (1, |z|, |w|, |zw|, $|w^2|$) é uma progressão geométrica, determinando todos os seus termos e a sua razão.

Resolução

Sendo w = 2i e z = 1 + i tem-se:

a) $z^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

$w^2 . \overline{z} + w = (2i)^2 . (1 – i) + (2i) =$

$= – 4 . (1 – i) + 2i = – 4 + 6i$

b) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|w| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$|zw| = |z| . |w| = 2\sqrt{2}$

$|w^2| = |w|^2 = 4$

A seqüência (1; |z|; |w|; |zw|; $|w^2|$) é equivalente a (1; $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4). Trata-se de uma progressão geométrica de razão $q = \sqrt{2}$, *pois* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{2}$, $\forall n \in \{1;2;3;4\}$ *e com* a_n *termo da seqüência.*

Respostas: *a)* $z^2 = 2i$ *e* $w^2 . \overline{z} + w = – 4 + 6i$

b) $|z| = \sqrt{2}$, $|w| = 2$. *A seqüência é* (1;$\sqrt{2}$; 2;$2\sqrt{2}$;4) *que é uma progressão geométrica de razão* $\sqrt{2}$.

4

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Determine todos os números reais λ para os quais se tem $\det(A - \lambda I) = 0$, onde I é a matriz identidade de ordem 3.

b) Tomando $\lambda = -2$, dê todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} (6 - \lambda)x - 3y = 0 \\ -3x + (6 - \lambda)y = 0 \\ x - y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Resolução

a) Se $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

então $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

Portanto:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (2 - \lambda) \cdot [(6 - \lambda)^2 - 9] = 0 \Leftrightarrow 2 - \lambda = 0$ ou $(6 - \lambda)^2 = 9$
$\Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $6 - \lambda = \pm 3 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = 3$ ou $\lambda = 9$

b) Se $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ *ou* $\lambda = 3$ *ou* $\lambda = 9$ *então, para* $\lambda = -2$, *temos:*

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \neq 0$$

Assim sendo, o sistema homogêneo

$$\begin{cases} (6 - \lambda)x - 3y = 0 \\ -3x + (6 - \lambda)y = 0 \\ x - y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6 - \lambda)x - 3y + 0z = 0 \\ -3x + (6 - \lambda)y + 0z = 0 \\ x - y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

é determinado e a única solução é $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Respostas: *a)* $\lambda = 2$ *ou* $\lambda = 3$ *ou* $\lambda = 9$
b) (0;0;0)

5

Considere função dada por $f(x) = 3^{2x+1} + m\,3^x + 1$.

a) Quando $m = -4$, determine os valores de x para os quais $f(x) = 0$.

b) Determine todos os valores reais de m para os quais a equação $f(x) = m + 1$ não tem solução real x.

Resolução

$f(x) = 3^{2x+1} + m \cdot 3^x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = 3^{2x} \cdot 3 + m \cdot 3^x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = 3 \cdot (3^x)^2 + m \cdot (3^x) + 1$

a) $m = -4 \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot (3^x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{4 \pm 2}{6} \Leftrightarrow 3^x = 1$ ou $3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$

b) $f(x) = m + 1 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 + m \cdot (3^x) + 1 = m + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 + m \cdot (3^x) - m = 0$

Fazendo $3^x = y$ resulta a equação

$3y^2 + m \cdot y - m = 0$.

Essa equação não tem soluções reais se, e somente se, suas raízes y_1 e y_2 não são reais **ou** se ambas forem reais negativas.

I) As raízes y_1 e y_2 não são reais $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 + 12m < 0 \Leftrightarrow -12 < m < 0$.

II) Para que as raízes y_1 e y_2 sejam ambas reais e negativas devemos ter $\Delta \geq 0$, $y_1 + y_2 = \frac{-m}{3} \leq 0$ e $y_1 \cdot y_2 = \frac{-m}{3} \geq 0$ que se verifica apenas para $m = 0$.

Concluímos, então, que $-12 < m \leq 0$.

Respostas: a) $x = -1$ ou $x = 0$

b) $-12 < m \leq 0$

6

Considere as funções $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = \log_2 x$, para $x > 0$.

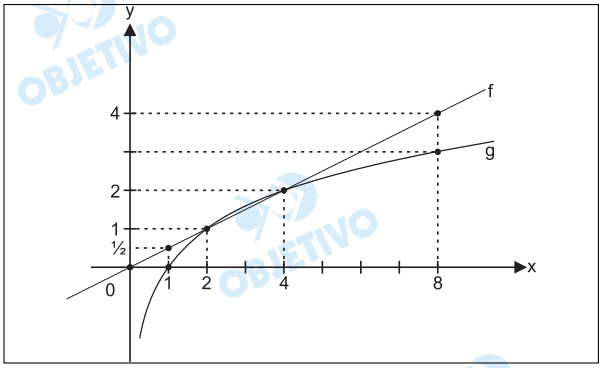
a) Represente, num mesmo sistema de coordenadas retangulares, os gráficos das duas funções, colocando os pontos cujas abscissas são $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$ e $x = 8$.

b) Baseado na representação gráfica, dê o conjunto solução da inequação $\frac{x}{2} < \log_2 x$, e justifique por que $\frac{\pi}{2} < \log_2 \pi$.

Resolução

$f(x) = \frac{x}{2}$ $\qquad$ $g(x) = \log_2 x$

a)



x	1	2	4	8
f(x)	1/2	1	2	4

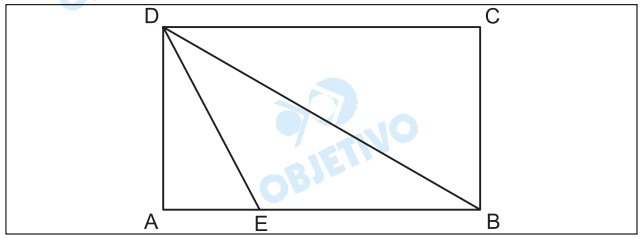
x	1	2	4	8
g(x)	0	1	2	3

b) $\frac{x}{2} < \log_2 x \Leftrightarrow 2 < x < 4$

Sendo: $2 < \pi < 4 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \log_2 \pi$

7

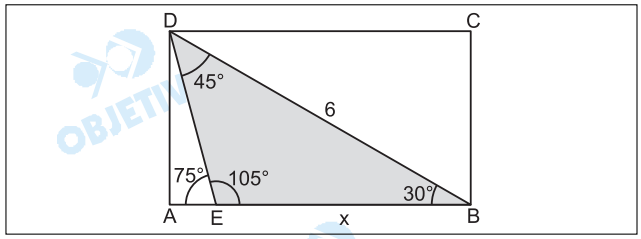
Na figura, *ABCD* é um retângulo, *BD* = 6 cm, a medida do ângulo $A\hat{B}D$ é $\alpha = 30^\circ$, a medida do ângulo $A\hat{E}D$ é β e $x = BE$. Determine:



a) a área do triângulo *BDE*, em função de *x*.
b) o valor de *x*, quando $\beta = 75°$.

Resolução

a)



$$S_{\Delta BDE} = \frac{x \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 30°}{2} = \frac{3x}{2}$$

b) $\operatorname{sen} 105° = \operatorname{sen}(60° + 45°) =$

$= \operatorname{sen} 60° \cdot \cos 45° + \cos 60° \cdot \operatorname{sen} 45° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Da Lei dos Senos, temos:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{6}{\operatorname{sen} 105°} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 6(\sqrt{3} - 1)$$

Respostas: *a)* $\frac{3x}{2}$ cm^2 *b)* $6(\sqrt{3} - 1)$ *cm*

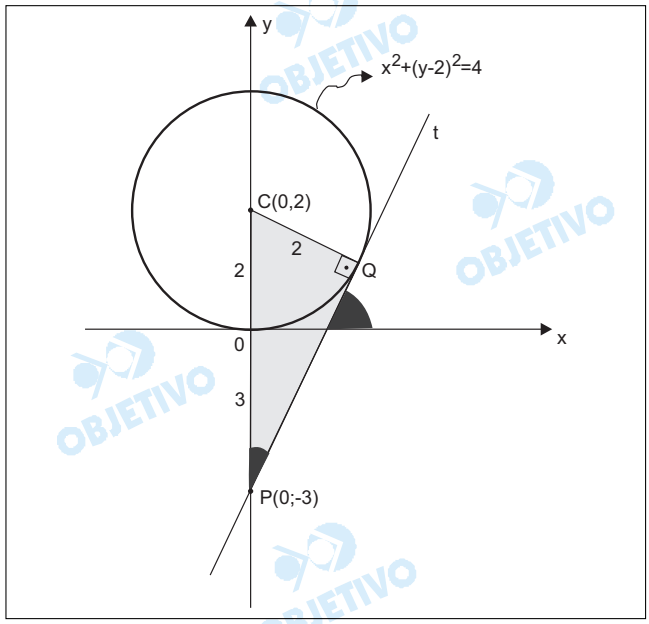
8

Considere a circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ e o ponto $P(0, -3)$.

a) Encontre uma equação da reta que passe por P e tangencie a circunferência num ponto Q de abscissa positiva.

b) Determine as coordenadas do ponto Q.

Resolução



a) ΔPQC *é retângulo:*

$PQ^2 = 5^2 - 2^2 = 21 \Rightarrow PQ = \sqrt{21}$

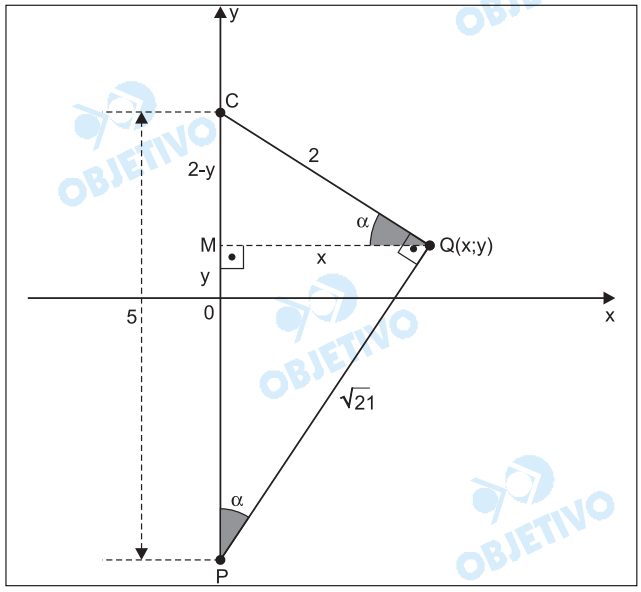
$$\text{Então } tg\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}} \Rightarrow cotg\,\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\theta = cotg\,\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow m_t = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{A equação da reta } \boldsymbol{t} \text{ é: } y + 3 = \frac{\sqrt{21}}{2}\,x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{21}x - 2y - 6 = 0$$

b)



$\Delta PQC \sim \Delta QMC$

$$\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{21}}{5}$$

$$\frac{2-y}{2} = \frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{6}{5}$$

Então: $Q\left(\frac{2\sqrt{21}}{5}\ ;\ \frac{6}{5}\right)$

Respostas: a) $\sqrt{21}x - 2y - 6 = 0$

b) $Q\left(\frac{2\sqrt{21}}{5}\ ;\ \frac{6}{5}\right)$

9

Do solo, você observa um amigo numa roda gigante. A altura *h* em metros de seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão $h(t) = 11,5 + 10 \text{ sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 26)\right]$, onde o tempo *t* é dado em segundos e a medida angular em radianos.

a) Determine a altura em que seu amigo estava quando a roda começou a girar ($t = 0$).

b) Determine as alturas mínima e máxima que seu amigo alcança e o tempo gasto em uma volta completa (período).

Resolução

a) A altura, em metros, em que seu amigo estava quando a roda começou a girar (t = 0), é dada por:

$$h(0) = 11,5 + 10 \text{ sen}\left[\frac{\pi}{12}(0 - 26)\right] =$$

$$= 11,5 + 10 \cdot \text{sen}\left(-\frac{13\pi}{6}\right) =$$

$$= 11,5 + 10 \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 11,5 + 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 11,5 - 5 = 6,5$$

b) Sendo h' e H, respectivamente, as alturas (em metros) mínima e máxima que seu amigo alcança, T o tempo (em segundos) gasto em uma volta completa, tem-se:

1º) $h' = 11,5 + 10 \cdot (-1) = 11,5 - 10 = 1,5$

2º) $H = 11,5 + 10 \cdot (+1) = 11,5 + 10 = 21,5$

3º) T é o período da função h(t)

$$\text{Assim: } T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = \frac{24\pi}{\pi} = 24$$

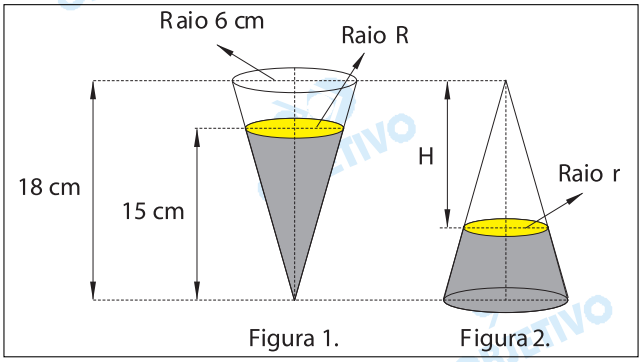
Respostas:

a) 6,5 metros.

b) altura mínima: 1,5 metro
altura máxima: 21,5 metros
período: 24 segundos

10

Um recipiente tampado, na forma de um cone circular reto de altura 18 cm e raio 6 cm, contém um líquido até a altura de 15 cm (figura 1). A seguir, a posição do recipiente é invertida (figura 2).



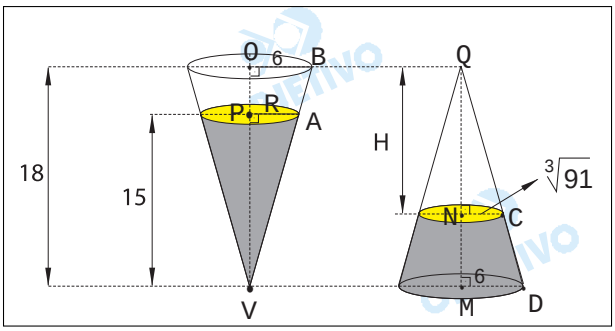
Sendo R e r os raios mostrados nas figuras,

a) determine R e o volume do líquido no cone em cm^3 (figura 1), como múltiplo de π.

b) dado que $r = \sqrt[3]{91}$, determine a altura H da parte sem líquido do cone na figura 2. (Use a aproximação $\sqrt[3]{91} \cong 9/2$.)

Resolução

a)



1º) Da semelhança dos triângulos retângulo PAV e OBV, tem-se:

$$\frac{R}{6} = \frac{15}{18} \Rightarrow R = 5$$

2º) Sendo V_L o volume, em centímetros cúbicos, do líquido no cone da figura 1, tem-se:

$$V_L = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 15 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15 = 125\pi$$

b) Da semelhança dos triângulos retângulos NCQ e MDQ, tem-se:

$$\frac{H}{18} = \frac{\sqrt[3]{91}}{6} \Leftrightarrow H = 3 \cdot \sqrt[3]{91} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H \cong 3 \cdot \frac{9}{2} \Leftrightarrow H \cong \frac{27}{2}$$

Respostas:

a) $R = 5\ cm$ e $V_L = 125\pi\ cm^3$

b) $H \cong \frac{27}{2}\ cm$