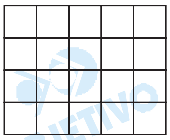
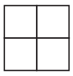
MATEMÁTICA

1

Considere o tabuleiro da figura.

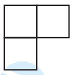


a) Considere uma peça com 4 casas:



De quantas maneiras diferentes pode-se colocá-la no tabuleiro, sem girá-la e mantendo-se sempre a mesma face voltada para cima, de forma a cobrir 4 casas por completo?

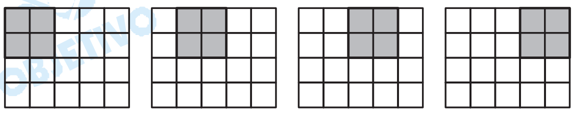
b) Considere, agora, a peça com 3 casas:



Imaginando todas as posições possíveis para a mesma, e mantendo-se sempre a mesma face voltada para cima, de quantas maneiras diferentes pode-se colocá-la no tabuleiro de modo que cubra 3 casas por completo?

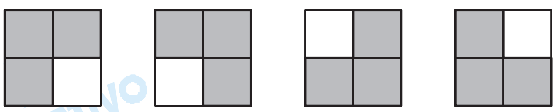
Resolução

a) *Considerando duas linhas consecutivas do tabuleiro, a peça considerada pode ser colocada em 4 posições diferentes, como se vê na seqüência de figuras:*



Como existem 3 formas de se escolher duas linhas consecutivas (1ª linha e 2ª linha; 2ª linha e 3ª linha; 3ª linha e 4ª linha), no total existem 4 x 3 = 12 maneiras diferentes de colocar a peça no tabuleiro.

b) *Para cada quadrado 2 x 2, existem 4 posições possíveis para a peça*  *, como mostra a seqüência de figuras seguinte:*



Como, pelo exposto no item a, existem 12 ma-

neiras diferentes de posicionar o quadrado 2 x 2, existem 12 x 4 = 48 formas de posicionar a peça considerada.

Respostas: *a) 12 maneiras*
b) 48 maneiras

2

Um grande arranjo de flores deve ser formado com 800 rosas, 750 hortências e 600 cravos, sendo composto de ramos, todos os ramos com o mesmo número de rosas, o mesmo número de hortências e o mesmo número de cravos. Nestas condições,

a) qual o maior número de ramos que pode ser formado?

b) quantas flores de cada qualidade tem cada ramo?

Resolução

a) A quantidade ***n*** *de ramos é divisor natural de 800, 750 e 600 e o maior possível. Desta forma* $n = \text{mdc}(800, 750, 600) = 50$

b) Cada ramo deverá conter $\frac{800}{50} = 16$ *rosas,* $\frac{750}{50} = 15$ *hortências e* $\frac{600}{50} = 12$ *cravos*

Respostas: *a) 50 ramos*
b) 16 rosas, 15 hortências e 12 cravos

3

Seja a seguinte expressão algébrica:

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} - \frac{x^3 + y^3}{x + y}$$, na qual x e y são números reais com $x \neq y$ e $x \neq -y$.

a) Encontre o valor de x para que a expressão resulte em 5 para y = 3.

b) Simplifique a expressão algébrica dada.

Resolução

Supondo $x \neq y$ *e* $x \neq -y$*, temos:*

1) $$\frac{x^3 - y^3}{x - y} - \frac{x^3 + y^3}{x + y} =$$

$$= \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x - y} - \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{x + y} =$$

$$= (x^2 + xy + y^2) - (x^2 - xy + y^2) = 2xy$$

2) $$2xy = 5 \text{ e } y = 3 \Rightarrow 2 \,.\, x \,.\, 3 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$$

Respostas: *a)* $x = \frac{5}{6}$
b) 2xy

4

Considere as circunferências z_1 e z_2 de equações

z_1: $(y - 2)^2 + (x + 1)^2 = 5$ e z_2: $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

a) Verifique se o ponto P = (2, 2) pertence ao interior da circunferência z_2.

b) Determine os pontos de interseção das circunferências z_1 e z_2.

Resolução

a) *A equação $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$ é de uma circunferência de centro $O_2(1; -1)$ e raio $R_2 = \sqrt{2}$*

Como

$d_{PO_2} = \sqrt{(2-1)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{10} > \sqrt{2} = R_2$, *o ponto P não pertence ao interior da circunferência z_2.*

b) *Os pontos de intersecção das circunferências z_1 e z_2 são as soluções do sistema.*

$$\begin{cases} (y-2)^2 + (x+1)^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \\ y = \dfrac{2x}{3} \end{cases}$$

Assim, $x^2 + \left(\dfrac{2x}{3}\right)^2 + 2x - 4 \cdot \left(\dfrac{2x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 13x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = \dfrac{6}{13}$. *Como, para*

$x = 0$ *tem-se* $y = 0$ *e, para* $x = \dfrac{6}{13}$ *tem-se* $y = \dfrac{4}{13}$,

os pontos de intersecção das circunferências são

$I_1(0,0)$ e $I_2\left(\dfrac{6}{13}, \dfrac{4}{13}\right)$.

Respostas: *a) P é externo ao círculo z_2*

b) (0;0) e $\left(\dfrac{6}{13}; \dfrac{4}{13}\right)$

5

Seja f uma função de 1º grau que passa pelos pontos (– 1, – 1) e (2, 0). Determine:

a) a taxa de variação entre $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$;

b) a equação da função f.

Resolução

*a) Admitindo que "a taxa de variação entre $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$" seja o coeficiente angular **m** da reta determinada pelos pontos (–1; –1) e (2; 0), temos:*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

*b) A equação da função **f** que passa pelo ponto (2; 0) e tem coeficiente angular $\frac{1}{3}$ é*

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

***Respostas**: a) $\frac{1}{3}$*

b) $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

6

Considere a seguinte equação:

$4 \cos^2 x - 2(\sqrt{3} - 1) \cos x - \sqrt{3} = 0$

a) Encontre os valores de x que satisfaçam essa equação.

b) Verifique se o valor $\frac{7\pi}{6}$ satisfaz a equação.

Resolução

a) $4 \cos^2 x - 2(\sqrt{3} - 1) \cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \cos x + 2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cos x (2 \cos x - \sqrt{3}) + 1 \,.\, (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2 \cos x - \sqrt{3})(2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cos x - \sqrt{3} = 0$ ou $2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + n \,.\, 2\pi$ ou $x = \pm \frac{2\pi}{3} + n \,.\, 2\pi$

b) $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, *portanto,* $\frac{7\pi}{6}$ ***não satisfaz*** *a equação dada, já que as únicas soluções são*

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$.

7

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} \log_2 x & \log_2 2x \\ y & \dfrac{y}{2} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 28 \\ 10 \end{pmatrix}$$

a) Efetue o produto AB.
b) Determine os valores de x e y para que AB = C.

Resolução

a) $$A = \begin{pmatrix} \log_2 x & \log_2 2x \\ y & \dfrac{y}{2} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A \,.\, B = \begin{pmatrix} 4 \log_2 x + 4 \log_2 2x \\ 4y + 2y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \log_2(16\, x^8) \\ 6y \end{pmatrix}$$

b) $$AB = C, \ AB = \begin{pmatrix} \log_2(16\, x^8) \\ 6y \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 28 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \log_2(16\, x^8) \\ 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(16\, x^8) = 28 \\ 6y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^8 = 2^{28} \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^8 = 2^{24} \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^3 \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Respostas: *a)* $AB = \begin{pmatrix} \log_2(16\, x^8) \\ 6y \end{pmatrix}$

b) $x = 8$ e $y = \dfrac{5}{3}$

8

Em relação à desigualdade: $3^{x^2 - 5x + 7} < 3$,

a) encontre os valores de x, no conjunto dos reais, que satisfaçam essa desigualdade;

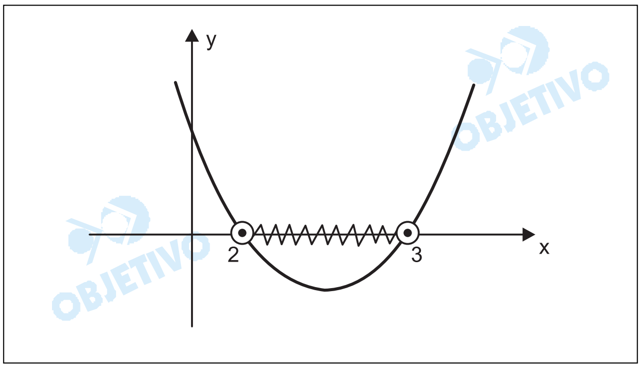
b) encontre a solução da desigualdade para valores de x no conjunto dos inteiros.

Resolução

$3^{x^2 - 5x + 7} < 3^1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 < x < 3$, pois o gráfico da função

$f(x) = x^2 - 5x + 6$ é do tipo:



No intervalo]2; 3[não existe nenhum número inteiro.

***Respostas**: a)]2; 3[*

b) Ø

9

Um colégio possui duas salas, A e B, de determinada série. Na sala A, estudam 20 alunos e na B, 30 alunos. Dois amigos, Pedro e João, estudam na sala A. Um aluno é sorteado da sala A e transferido para a B. Posteriormente, um aluno é sorteado e transferido da sala B para a sala A.

a) No primeiro sorteio, qual a probabilidade de qualquer um dos dois amigos ser transferido da sala A para a B?

b) Qual a probabilidade, no final das transferências, de os amigos ficarem na mesma sala?

Resolução

a) *A sala A possui Pedro, João e mais 18 alunos. A probabilidade de, no primeiro sorteio, ser transferido qualquer um dos dois amigos é*

$$\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

b) *Transferido um aluno da sala A para B e posteriormente um aluno de B para A, os dois amigos terminarão na mesma sala se, nenhum dos dois for transferido no primeiro sorteio **ou** se o mesmo amigo for transferido nos dois sorteios. A probabilidade de que isto ocorra é*

$$\frac{18}{20} + \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{31} = \frac{9}{10} + \frac{1}{310} = \frac{280}{310} = \frac{28}{31}$$

Respostas: *a)* $\frac{1}{10}$ *b)* $\frac{28}{31}$

10

Em relação ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + my = 10 \end{cases}$$

a) resolva o sistema para m = 4;

b) encontre o conjunto de valores de m, em relação aos reais, para que o sistema seja possível e determinado.

Resolução

a) *Para m = 4 temos:*

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 4x = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{4} \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{4} \\ y = \dfrac{7}{8} \end{cases}$$

b) *O sistema* $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + my = 10 \end{cases}$, *nas incógnitas x e y, é possível e determinado se, e somente se:*

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 3m + 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{4}{3}$$

Respostas: *a)* $\left\{\left(\dfrac{13}{4}; \dfrac{7}{8}\right)\right\}$

b) $m \neq -\dfrac{4}{3}$

Comentário

As dez questões foram bem enunciadas e a prova foi bem equilibrada quanto à dificuldade e aos assuntos exigidos. Lamentamos, apenas, a falta de questões de Geometria.