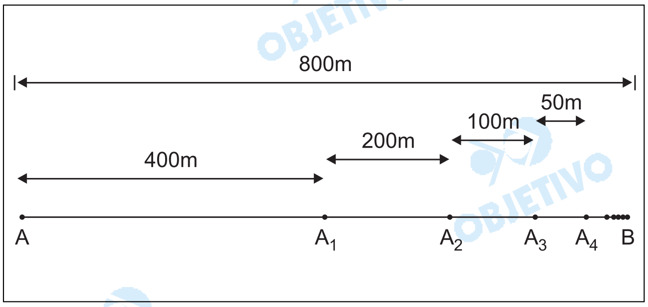
MATEMÁTICA

20

Um objeto parte do ponto A, no instante t = 0, em direção ao ponto B, percorrendo, a cada minuto, a metade da distância que o separa do ponto B, conforme figura. Considere como sendo de 800 metros a distância entre A e B.



Deste modo, ao final do primeiro minuto (1º. período) ele deverá se encontrar no ponto A_1; ao final do segundo minuto (2º. período), no ponto A_2; ao final do terceiro minuto (3º. período), no ponto A_3, e, assim, sucessivamente.

Suponhamos que a velocidade se reduza linearmente em cada período considerado.

a) Calcule a distância percorrida pelo objeto ao final dos 10 primeiros minutos. Constate que, nesse instante, sua distância ao ponto B é inferior a 1 metro.

b) Construa o gráfico da função definida por "f(t) = distância percorrida pelo objeto em t minutos", a partir do instante t = 0.

Resolução

A distância, em metros, percorrida pelo objeto em cada minuto é termo da progressão geométrica (400; 200; 100; ...) de razão $\frac{1}{2}$.

a) Ao final de 10 minutos, a distância percorrida pelo objeto foi

$$f(10) = \frac{400\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 800\left(1 - \frac{1}{1024}\right) \Rightarrow$$

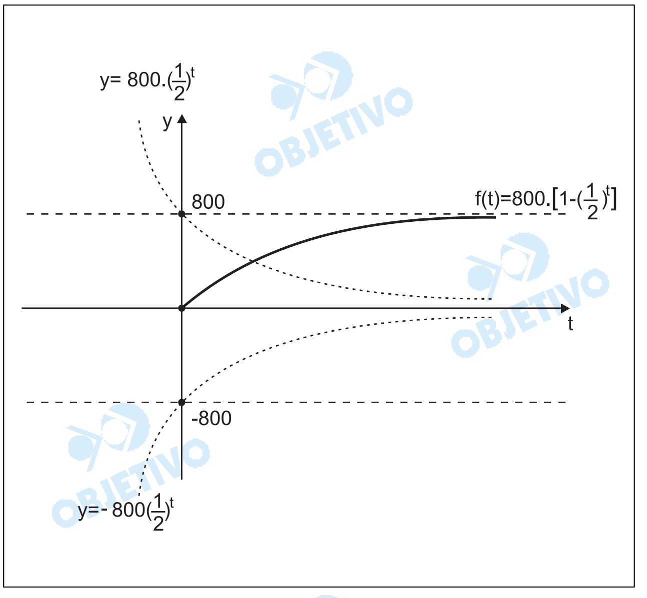
$$\Rightarrow f(10) = 800 \cdot \frac{1023}{1024} \simeq 799{,}22m.$$

No instante t = 10, a distância do objeto ao ponto B é, aproximadamente, (800 – 799,22)m = 0,78m, inferior a 1 metro.

b) A função que determina a distância percorrida pelo objeto em t minutos, a partir do instante t = 0, é

$$f(t) = \frac{400\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t\right]}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow f(t) = 800\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t\right]$$

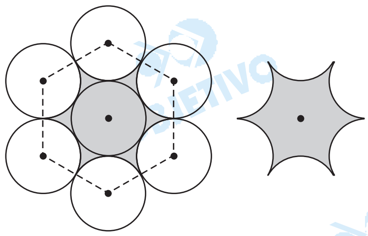
O gráfico de f(t) é o que se destaca na figura seguinte:



Respostas: *a) 799,2 m; a distância ao ponto B é 0,78 m*
b) Gráfico

21

Na figura, são exibidas sete circunferências. As seis exteriores, cujos centros são vértices de um hexágono regular de lado 2, são tangentes à interna. Além disso, cada circunferência externa é também tangente às outras duas que lhe são contíguas.

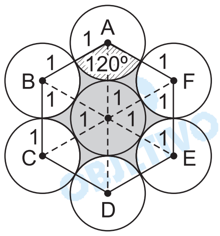


Nestas condições, calcule:

a) a área da região sombreada, apresentada em destaque à direita.

b) o perímetro da figura que delimita a região sombreada.

Resolução



Cada uma das circunferências menores (inclusive a central) tem raio igual a 1.

Sendo S_{ABCDEF} a área do hexágono regular, A_S a área do setor circular de raio 1 e ângulo central 120°, e ℓ o comprimento do arco de circunferência desse setor, temos:

1) $S_{ABCDEF} = 6 \cdot \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$

2) $A_S = \dfrac{120°}{360°} \pi \cdot 1^2 = \dfrac{\pi}{3}$

3) $\ell = \dfrac{120°}{360°} 2\pi \cdot 1 = \dfrac{2\pi}{3}$

Assim sendo, a área S da região sombreada é

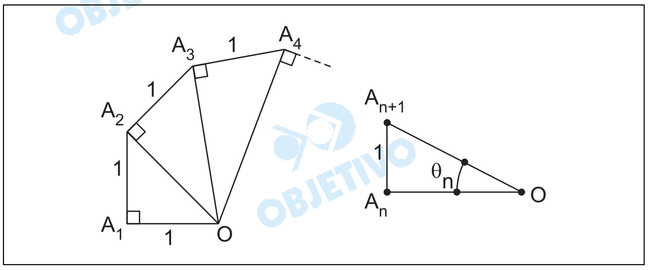
$$S = S_{ABCDEF} - 6\,S_S = 6\sqrt{3} - 6\,\frac{\pi}{3} = 6\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

e o perímetro P da figura que limita a região sombreada é $P = 6\ell = 6 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = 4\pi$

Respostas: *a)* $6\left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}\right)$ *b)* 4π

22

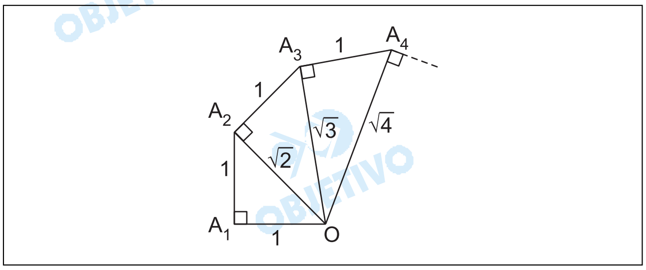
Os triângulos que aparecem na figura da esquerda são retângulos e os catetos OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5,..., A_9A_{10} têm comprimento igual a 1.



a) Calcule os comprimentos das hipotenusas OA_2, OA_3, OA_4 e OA_{10}.

b) Denotando por θ_n o ângulo ($A_n\hat{O}A_{n+1}$), conforme figura da direita, descreva os elementos a_1, a_2, a_3 e a_9 da seqüência (a_1, a_2, a_3, ..., a_8, a_9), sendo $a_n = \text{sen}(\theta_n)$.

Resolução



a) Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, …,OA_9A_{10}, temos:

I) $(OA_2)^2 = (OA_1)^2 + (A_1A_2)^2 \Rightarrow (OA_2)^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow OA_2 = \sqrt{2}$

II) $(OA_3)^2 = (OA_2)^2 + (A_2A_3)^2 \Rightarrow (OA_3)^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow OA_3 = \sqrt{3}$

III) $(OA_4)^2 = (OA_3)^2 + (A_3A_4)^2 \Rightarrow (OA_4)^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow OA_4 = \sqrt{4} = 2$. *De forma análoga* $OA_{10} = \sqrt{10}$

*b) De acordo com o enunciado e observando a lei de formação da seqüência do item **a**, temos:*

Assim, $a_n = \text{sen}\ \theta_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ *e, portanto,*

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$\vdots$

$$a_8 = \frac{1}{\sqrt{8+1}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$a_9 = \frac{1}{\sqrt{9+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Respostas: *a)* $OA_2 = \sqrt{2}$, $OA_3 = \sqrt{3}$, $OA_4 = 2$ e $OA_{10} = \sqrt{10}$

b) $a_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $a_3 = \dfrac{1}{2}$ e

$$a_9 = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

23

As figuras A e B representam dois retângulos de perímetros iguais a 100 cm, porém de áreas diferentes, iguais a 400 cm^2 e 600 cm^2, respectivamente.

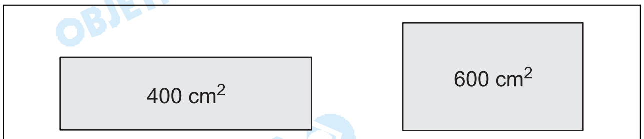


Figura A — Figura B

A figura C exibe um retângulo de dimensões $(50 – x)$ cm e x cm, de mesmo perímetro que os retângulos das figuras A e B.

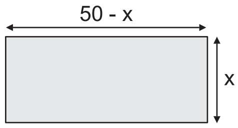


Figura C

a) Determine a lei, f(x), que expressa a área do retângulo da figura C e exiba os valores de x que fornecem a área do retângulo da figura A.

b) Determine a maior área possível para um retângulo nas condições da figura C.

Resolução

a) A lei f(x) que expressa a área é tal que

$f(x) = x \,.\, (50 – x)$, *com* $0 < x < 50$

$x(50 – x) = 400 \Leftrightarrow x^2 – 50x + 400 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 10$ *ou* $x = 40$

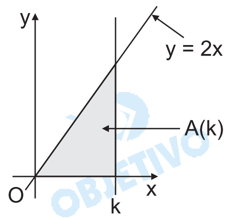
b) A função f, definida por $f(x) = x(50 – x)$ *e que caracteriza a área do retângulo, assume o valor máximo para* $x = 25$ *e a área máxima é*

$f(25) = 25 \,.\, (50 – 25) = 625$

Respostas: *a)* $f(x) = x \,.\, (50 – x)$, *em* cm^2, *com* $0 < x < 50$;
10 cm e 40 cm
b) 625 cm^2

24

Considere a região sombreada na figura, delimitada pelo eixo Ox e pelas retas de equações $y = 2x$ e $x = k$, $k > 0$.



Nestas condições, expresse, em função de k:

a) a área A(k) da região sombreada.

b) o perímetro do triângulo que delimita a região sombreada.

Resolução

a) $A(k) = \dfrac{k \cdot 2k}{2} = k^2,\ k > 0$

b) O perímetro do triângulo é

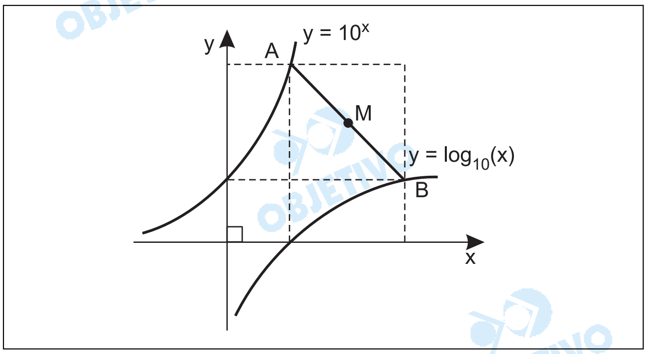
$$k + 2k + \sqrt{k^2 + 4k^2} = 3k + k\sqrt{5} = k\left(3 + \sqrt{5}\right)$$

Respostas: *a)* $A(k) = k^2$

b) $k(3 + \sqrt{5})$

25

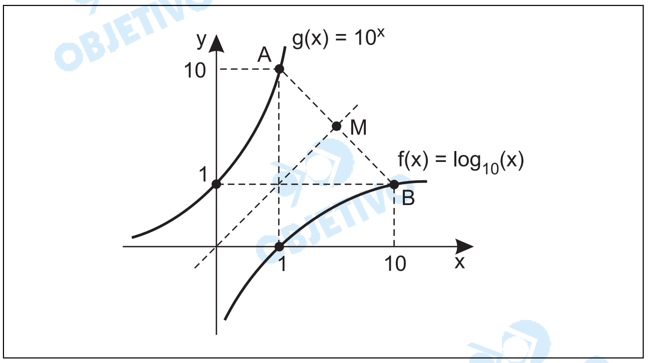
Considere os gráficos das funções definidas por $f(x) = \log_{10}(x)$ e $g(x) = 10^x$, conforme figura (fora de escala).



a) Dê as coordenadas de M, ponto médio do segmento AB.

b) Mostre que $(fog)(x) = x$ e $(gof)(x) = x$, para todo $x > 0$.

Resolução



a) De acordo com o gráfico, A(1;10), B(10;1) e

$$M = \left(\frac{11}{2}; \frac{11}{2}\right) \text{ pois é ponto médio de AB.}$$

b) $(fog)(x) = f[g(x)] = f(10^x) = \log_{10}(10^x) = x, \forall\, x > 0$

$(gof)(x) = g[f(x)] = g[\log_{10} x] = 10^{\log_{10} x} = x, \forall\, x > 0$

Respostas: *a)* $M\left(\frac{11}{2}; \frac{11}{2}\right)$

b) demonstração