**19 C**

Sejam as funções f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por $f(x) = 2 - x$ e $g(x) = x^2 - 1$. Com relação à função gof, definida por $(gof)(x) = g(f(x))$, é verdade que

a) a soma dos quadrados de suas raízes é igual a 16.
b) o eixo de simetria de seu gráfico é y = 2.
c) o seu valor mínimo é –1.
d) o seu conjunto imagem está contido em $[0, +\infty[$.
e) $(gof)(x) < 0$ se, e somente se, $0 < x < 3$.

**Resolução**

*Se $f(x) = 2 - x$ e $g(x) = x^2 - 1$, então $(gof)(x) = g[f(x)] = g[2 - x] = (2 - x)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$.*

*Sejam $x_1$ e $x_2$ as raízes de gof, e $V(x_v; y_v)$ o vértice da parábola que representa gof no plano cartesiano.*

*Assim sendo,*

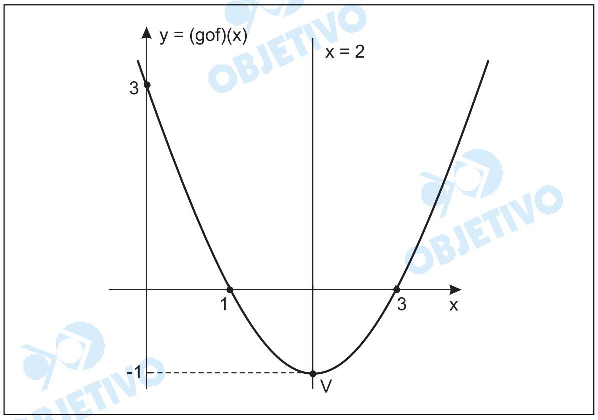
1) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4^2 - 2 \cdot 3 = 10$

2) $x_v = -\dfrac{(-4)}{2 \cdot 1} = 2$ *e*

$y_v = (gof)(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$

3) *O eixo de simetria do gráfico de gof tem equação* $x = x_v \Leftrightarrow x = 2$

4) *O gráfico de gof é*




5) $(gof)(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$.

6) *O conjunto* $Im(gof) = [-1; +\infty[$ *e desta forma, o valor mínimo de gof é* $-1$.

## 20 d

O polinômio $p = \begin{vmatrix} x & -1 & x+1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -x^2 & 1 \end{vmatrix}$ admite

a) três raízes reais.
b) uma raiz de multiplicidade 2.
c) nenhuma raiz real.
d) uma única raiz real.
e) uma raiz de multiplicidade 3.

**Resolução**

1) $p = \begin{vmatrix} x & -1 & x+1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -x^2 & 1 \end{vmatrix} = 2x^3 + x^2 - 3$

2) *As possíveis raízes inteiras de* ***p*** *são 1, – 1, – 3 ou 3.*

3) *Por verificação, conclui-se que 1 é raiz e, portanto, o polinômio* ***p*** *é divisível por x – 1.*

4) $\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 - 3 & x - 1 \\ \cline{2-2} 0 & 2x^2 + 3x + 3 \end{array} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 3 = (x - 1)(2x^2 + 3x + 3)$

5) *A equação* $2x^2 + 3x + 3 = 0$ *tem duas raízes complexas não reais.*

6) *O polinômio* ***p*** *tem uma única raiz real 1 e duas raízes complexas conjugadas.*

# 21 e

Sabe-se que, para todo n $\mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{n^2 - 15n}{2} + \left( \frac{n^2 - 23n}{2} \right) . \, i \text{ é a expressão}$$

da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. Considerando que i é a unidade imaginária, a forma trigonométrica do décimo termo dessa progressão é

a) $\sqrt{2} \, . \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \, . \, \text{sen} \, \frac{3\pi}{4} \right)$

b) $\sqrt{2} \, . \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \, . \, \text{sen} \, \frac{7\pi}{4} \right)$

c) $2\sqrt{2} \, . \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \, . \, \text{sen} \, \frac{3\pi}{4} \right)$

d) $2\sqrt{2} \, . \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \, . \, \text{sen} \, \frac{5\pi}{4} \right)$

e) $2\sqrt{2} \, . \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \, . \, \text{sen} \, \frac{7\pi}{4} \right)$

**Resolução**

1) $a_{10} = S_{10} - S_9 =$

$$= \left[ \frac{10^2 - 15 \, . \, 10}{2} + \left( \frac{10^2 - 23 \, . \, 10}{2} \right) i \right] - \left[ \frac{9^2 - 15 \, . \, 9}{2} + \left( \frac{9^2 - 23 \, . \, 9}{2} \right) i \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{10} = 2 - 2i$$

2) $\rho = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

3)
$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \text{sen} \, \theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] 0 \leq \theta < 2\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

Logo, $a_{10} = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \, . \, \text{sen} \, \frac{7\pi}{4} \right)$

## 22 C

Se os pontos (1;4), (3;2) e (7;y) são vértices consecutivos de um retângulo, então a sua área, em unidades de superfície, é

a) 8 b) $8\sqrt{2}$ c) 16 d) $16\sqrt{2}$ e) 32

**Resolução**

*Se os pontos A(1;4), B(3;2) e C(7;y) são vértices consecutivos de um retângulo, então os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares, portanto:*

$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AB}} \Rightarrow \frac{y-2}{7-3} = \frac{-1}{\dfrac{2-4}{3-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-2}{4} = 1 \Leftrightarrow y = 6$$

*As medidas dos lados AB e BC são:*

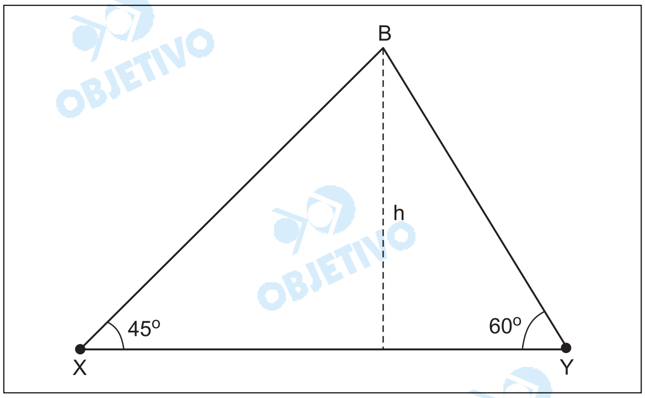
$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8}$$

$BC = \sqrt{(7-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{32}$*, e a área, em unidades de superfície, é igual a:*

$$S = AB \,.\, BC = \sqrt{8} \,.\, \sqrt{32} = 16$$

**23 d**

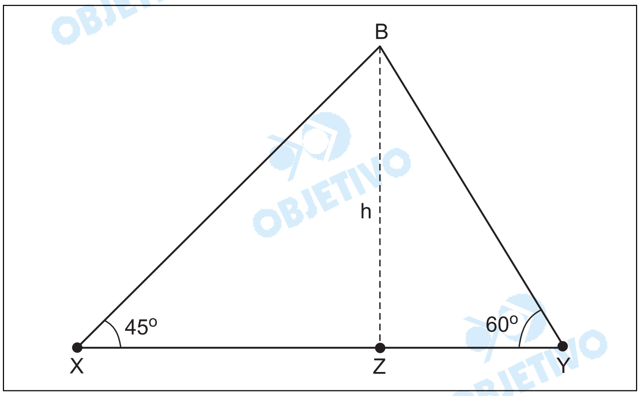
De dois observatórios, localizados em dois pontos X e Y da superfície da Terra, é possível enxergar um balão meteorológico B, sob ângulos de 45° e 60°, conforme é mostrado na figura abaixo.




Desprezando-se a curvatura da Terra, se 30 km separam X e Y, a altura h, em quilômetros, do balão à superfície da Terra, é

a) $30 - 15\sqrt{3}$ b) $30 + 15\sqrt{3}$ c) $60 - 30\sqrt{3}$
d) $45 - 15\sqrt{3}$ e) $45 + 15\sqrt{3}$

**Resolução**




*1) O triângulo XZB é retângulo e isósceles: XZ = h*
*2) No triângulo BZY, como XY = 30, tem-se ZY = 30 – h*

$$e\ tg\ 60° = \frac{h}{30 - h} = \sqrt{3} \Rightarrow h = 30\sqrt{3} - \sqrt{3}\,h \Rightarrow$$

$$h(\sqrt{3} + 1) = 30\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow$$

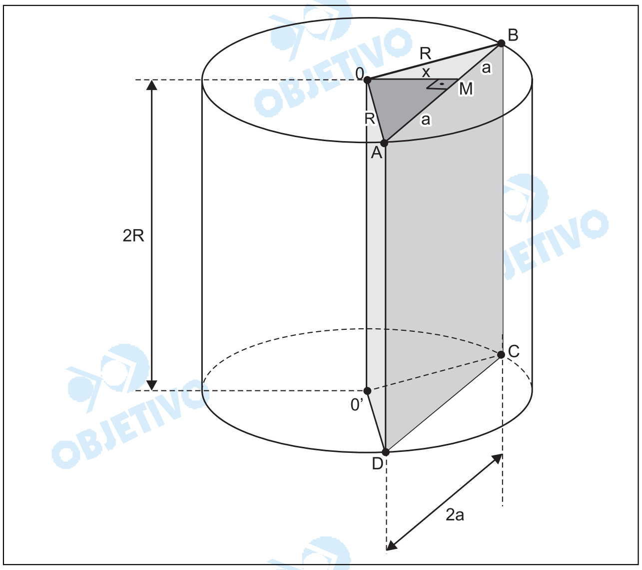
$$\Rightarrow h = 45 - 15\sqrt{3}$$

## 24 b

Um cilindro circular reto tem volume igual a $250\pi$ cm$^3$. Um plano, paralelo ao eixo desse cilindro, à distância de x cm desse eixo, determina uma seção retangular de área igual a 60 cm$^2$. Se a medida da altura do cilindro é igual ao dobro da medida do raio da base, então x é igual a

a) $\dfrac{9}{2}$ b) 4 c) $2\sqrt{3}$ d) $\dfrac{13}{4}$ e) $\sqrt{10}$

**Resolução**




*Sejam R e h = 2R as medidas, em centímetros, do raio da base e da altura do cilindro, respectivamente.*

*Como o volume do cilindro é igual a $250\pi$ cm$^3$, temos:*

$$\pi R^2 \cdot h = 250\pi \Leftrightarrow \pi R^2 \cdot 2R = 250\pi \Leftrightarrow R = 5$$

*Sendo 2a a medida, em centímetros, da base do retângulo, temos:*

$2a \cdot h = 60 \Leftrightarrow 2a \cdot 2R = 60 \Leftrightarrow 2 \cdot a \cdot 2 \cdot 5 = 60 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 3$

*Assim, no triângulo retângulo AMO temos:*

$$x^2 + a^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + 3^2 = 5^2 \Leftrightarrow x = 4$$

**Comentário**

*Com seis questões tradicionais, de grau médio de dificuldade e com enunciados claros e precisos, a prova de matemática do vestibular do Centro Paula Souza caracterizou-se por permitir selecionar candidatos bem preparados.*