21 c

Um supermercado adquiriu detergentes nos aromas limão e coco. A compra foi entregue, embalada em 10 caixas, com 24 frascos em cada caixa. Sabendo-se que cada caixa continha 2 frascos de detergentes a mais no aroma limão do que no aroma coco, o número de frascos entregues, no aroma limão, foi

a) 110 b) 120 c) 130 d) 140 e) 150

Resolução

Em cada caixa, x é o número de frascos de detergente aroma "coco" e x + 2 é o número de frascos de detergente aroma "limão".

Assim, $x + x + 2 = 24 \Rightarrow x = 11$ *e* $x + 2 = 13$

Logo, nas 10 caixas, existem 13 . 10 = 130 frascos de detergente aroma "limão".

22 a

O menor número inteiro positivo que devemos adicionar a 987 para que a soma seja o quadrado de um número inteiro positivo é

a) 37 b) 36 c) 35 d) 34 e) 33

Resolução

Como $31^2 = 961 < 987 < 32^2 = 1024$, *o menor número inteiro positivo* ***n*** *que devemos adicionar a 987 é tal que:* $987 + n = 1024 \Rightarrow n = 37$

23 d

O Sr. Reginaldo tem dois filhos, nascidos respectivamente em 1/1/2000 e 1/1/2004. Em testamento, ele estipulou que sua fortuna deve ser dividida entre os dois filhos, de tal forma que

(1) os valores sejam proporcionais às idades;

(2) o filho mais novo receba, pelo menos, 75% do valor que o mais velho receber.

O primeiro dia no qual o testamento poderá ser cumprido é:

a) 1/1/2013 b) 1/1/2014 c) 1/1/2015
d) 1/1/2016 e) 1/1/2017

Resolução

1) *Se os nascimentos ocorreram em 01/01/2000 e 01/01/2004 então as idades dessas pessoas serão x + 4 e x anos, respectivamente.*

2) *Nas condições do problema, se* ***a*** e ***b*** *forem as parcelas a serem herdadas então*

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{x+4} \Rightarrow a = \frac{bx}{x+4}$$

3) *Se* $a \geq 75\%b$ *então* $\dfrac{bx}{x+4} \geq \dfrac{3b}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4x \geq 3x + 12 \Rightarrow x \geq 12 \text{ e } x + 4 \geq 16$$

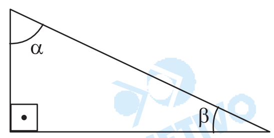
Logo, a divisão deverá ser feita a partir de 01/01/2016.

24 **d**

Sabe-se que x = 1 é raiz da equação

$(\cos^2\alpha)x^2 - (4 \cos \alpha \text{ sen } \beta)x + \dfrac{3}{2} \text{ sen } \beta = 0$, sendo α e β os ângulos agudos indicados no triângulo retângulo da figura abaixo.

Pode-se então afirmar que as medidas de α e β são, respectivamente,



a) $\dfrac{\pi}{8}$ e $\dfrac{3\pi}{8}$ b) $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{\pi}{3}$ c) $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{\pi}{4}$

d) $\dfrac{\pi}{3}$ e $\dfrac{\pi}{6}$ e) $\dfrac{3\pi}{8}$ e $\dfrac{\pi}{8}$

Resolução

Se x = 1 é raiz da equação

$(\cos^2 \alpha) \cdot x^2 - (4 \cdot \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta) \cdot x + \dfrac{3}{2} \cdot \text{sen } \beta = 0$,

então

$\cos^2\alpha \cdot 1^2 - (4 \cdot \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta) \cdot 1 + \dfrac{3}{2} \cdot \text{sen } \beta = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha - 4 \cdot \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta + \dfrac{3}{2} \cdot \text{sen } \beta = 0$

Como α e β são ângulos agudos do triângulo e são complementares ($\cos \alpha = \text{sen } \beta$), a equação resulta:

$\cos^2\alpha - 4 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + \dfrac{3}{2} \cdot \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 \cdot \cos^2\alpha + \dfrac{3}{2} \cdot \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow$

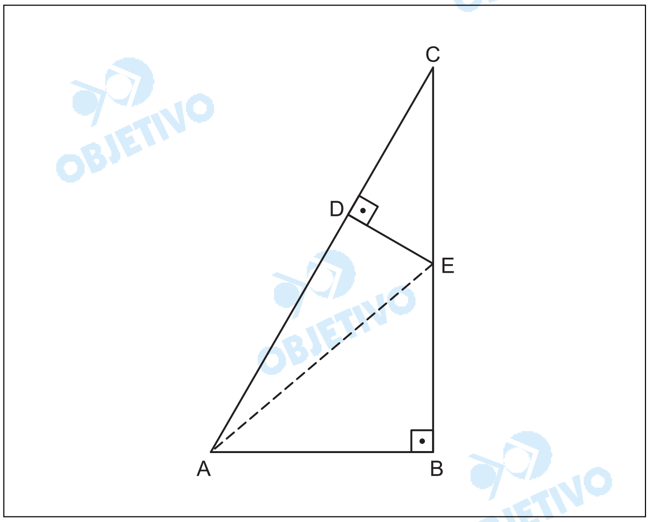
$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \cdot \cos \alpha = 3 \cdot \cos^2\alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \dfrac{1}{2}$,

(pois $\cos \alpha \neq 0$)

Portanto $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ *e* $\beta = \dfrac{\pi}{6}$

25 c

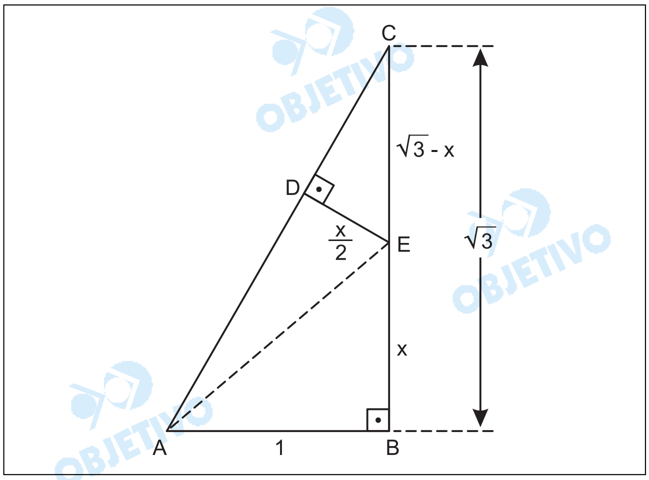
Na figura, ABC e CDE são triângulos retângulos, AB = 1, BC = $\sqrt{3}$ e BE = 2DE. Logo, a medida de $\overline{AE}$ é



a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Resolução



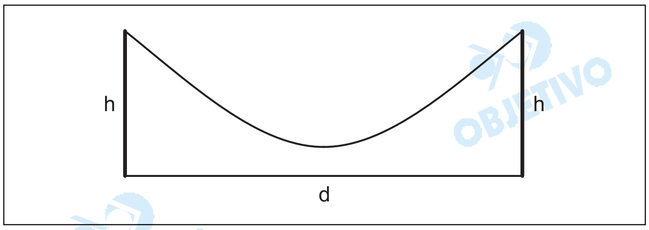
1) $(AC)^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow AC = 2$

2) $\dfrac{DE}{BA} = \dfrac{CE}{CA} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{3} - x}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3) $(AE)^2 = 1^2 + x^2 \Leftrightarrow (AE)^2 = 1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AE = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

26 b



Suponha que um fio suspenso entre duas colunas de mesma altura h, situadas à distância d (ver figura), assuma a forma de uma parábola.

Suponha também que

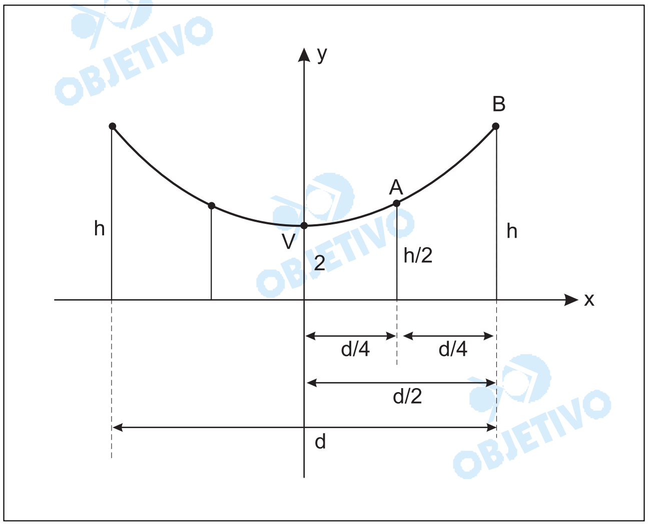
(i) a altura mínima do fio ao solo seja igual a 2;

(ii) a altura do fio sobre um ponto no solo que dista $\frac{d}{4}$ de uma das colunas seja igual a $\frac{h}{2}$.

Se $h = 3\frac{d}{8}$, então d vale

a) 14 b) 16 c) 18 d) 20 e) 22

Resolução



Considerando o eixo das abscissas contido no "solo" e o eixo das ordenadas contendo o vértice da parábola, ambos no plano da parábola, conforme figura, a função que define a curva determinada pelo fio é tal que

$f(x) = ax^2 + 2$, *com* $-\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}$ *e* $a > 0$

Os pontos $A\left(\frac{d}{4}; \frac{h}{2}\right)$ *e* $B\left(\frac{d}{2}; h\right)$ *pertencem ao gráfico de f, portanto*

$$\begin{cases} a\left(\frac{d}{4}\right)^2 + 2 = \frac{h}{2} \\ a\left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2 = h \\ h = \frac{3d}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ad^2 + 32 = 8h \\ ad^2 + 8 = 4h \\ d = \frac{8h}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 24 = 4h \\ d = \dfrac{8h}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 6 \\ d = 16 \end{cases}$$

27 e

Participam de um torneio de voleibol, 20 times distribuídos em 4 chaves, de 5 times cada.
Na 1ª fase do torneio, os times jogam entre si uma única vez (um único turno), todos contra todos em cada chave, sendo que os 2 melhores de cada chave passam para a 2ª fase.
Na 2ª fase, os jogos são eliminatórios; depois de cada partida, apenas o vencedor permanece no torneio. Logo, o número de jogos necessários até que se apure o campeão do torneio é

a) 39 b) 41 c) 43 d) 45 e) 47

Resolução

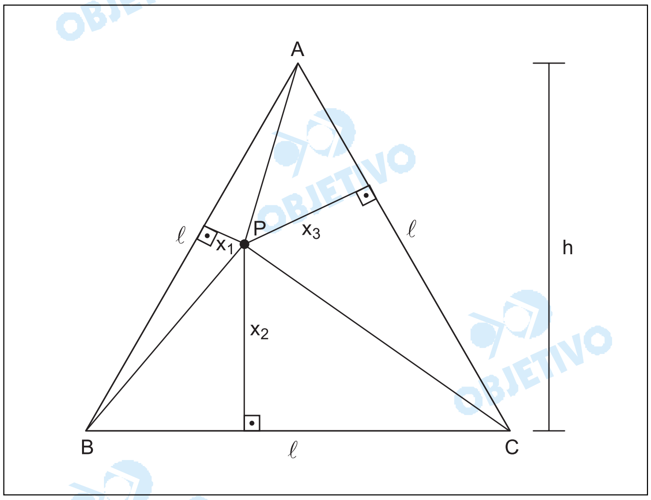
Na primeira fase foram realizados $4 \cdot C_{5,2} = 4 \cdot 10 = 40$ *jogos; na segunda fase, 4 jogos; na terceira fase, 2 jogos e na final, 1 jogo.*
Total de jogos $= 40 + 4 + 2 + 1 = 47$

28 b

A soma das distâncias de um ponto interior de um triângulo equilátero aos seus lados é 9. Assim, a medida do lado do triângulo é

a) $5\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{3}$
d) $8\sqrt{3}$ e) $9\sqrt{3}$

Resolução



Considere o triângulo eqüilátero ABC de lado ℓ e altura h e $x_1 + x_2 + x_3 = 9$

Assim, sendo S a área do triângulo ABC, temos

$$S = S_{ABP} + S_{BCP} + S_{ACP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ell \, . \, h}{2} = \frac{\ell \, . \, x_1}{2} + \frac{\ell \, . \, x_2}{2} + \frac{\ell \, . \, x_3}{2} \Leftrightarrow$$

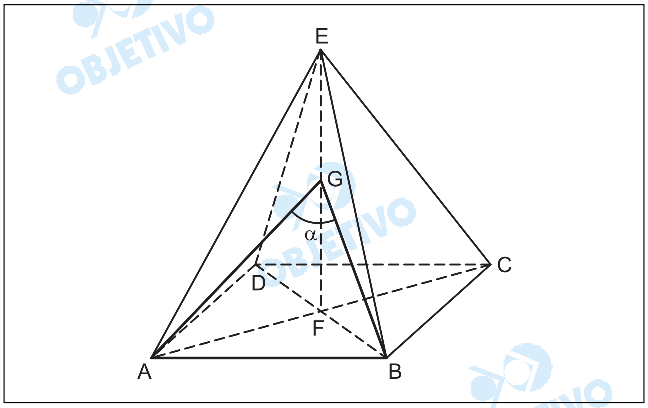
$$\Leftrightarrow h = x_1 + x_2 + x_3 \Leftrightarrow h = 9$$

Como $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$, *vem:*

$$9 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \ell = \frac{18}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \ell = 6\sqrt{3}$$

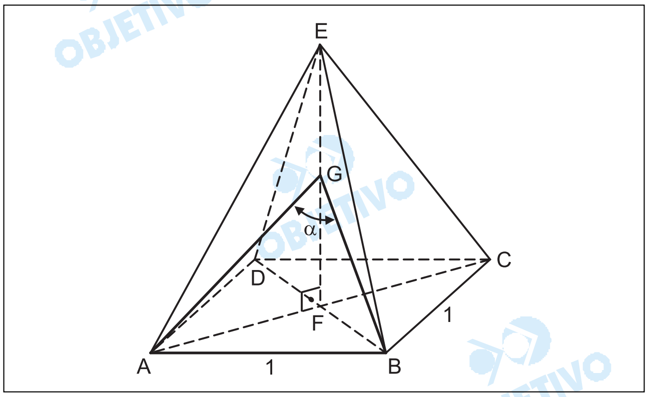
29 b

A figura abaixo mostra uma pirâmide reta de base quadrangular ABCD de lado 1 e altura EF = 1. Sendo G o ponto médio da altura $\overline{EF}$ e α a medida do ângulo $A\hat{G}B$, então cos α vale



a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{5}$ e) $\dfrac{1}{6}$

Resolução



A partir do enunciado, supondo que a base da pirâmide seja quadrada, temos:

1) $AF = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $GF = \dfrac{1}{2}$*, no triângulo retângulo (e isósceles) AFG, temos:*

$$AG^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow AG = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AG = BG = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

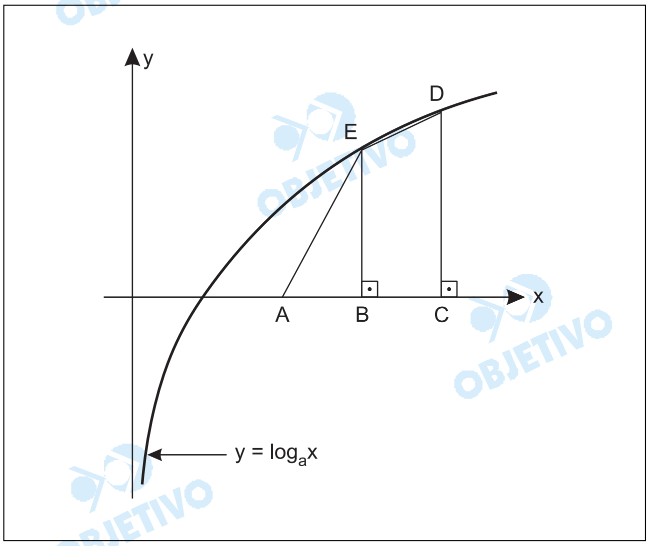
2) Lei dos cossenos no ΔABG*:*

$$1^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$$

30 a

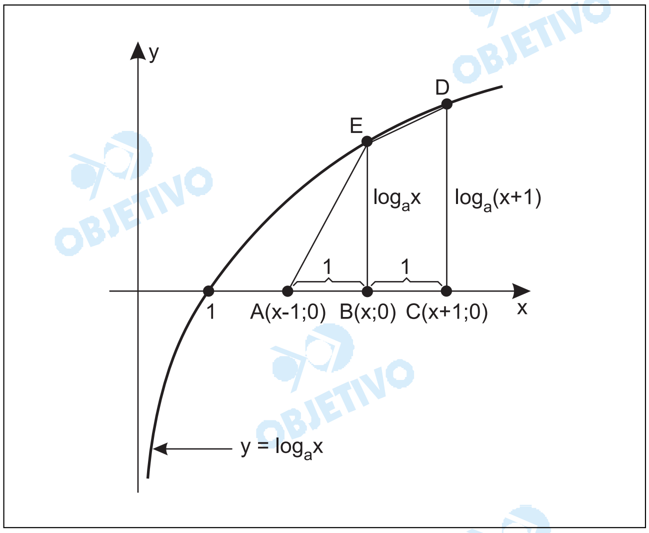
Os pontos D e E pertencem ao gráfico da função $y = \log_a x$, com $a > 1$ (figura abaixo). Suponha que $B = (x,0)$, $C = (x + 1,0)$ e $A = (x - 1, 0)$. Então, o valor de x, para o qual a área do trapézio BCDE é o triplo da área do triângulo ABE , é



a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\frac{1}{2} + \sqrt{5}$

d) $1 + \sqrt{5}$ e) $\frac{1}{2} + 2\sqrt{5}$

Resolução



$A_{BCDE} = 3\,A_{ABE} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\log_a x + \log_a(x+1)}{2} \cdot 1 = 3 \cdot \frac{1 \cdot \log_a x}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \log_a x(x+1) = \log_a x^3 \Rightarrow x^2 + x = x^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, pois $x > 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Observação: *Se* $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, *então*

$x - 1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2} < 1$. *Assim, o ponto A encontra-se à esquerda do ponto de abscissa 1.*

31 e

Sejam a e b números reais tais que:

(i) a, b e a + b formam, nessa ordem, uma PA;

(ii) 2^a, 16 e 2^b formam, nessa ordem, uma PG.

Então o valor de a é

a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{4}{3}$ c) $\dfrac{5}{3}$ d) $\dfrac{7}{3}$ e) $\dfrac{8}{3}$

Resolução

1) (a, b, a + b, …) é uma P.A. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2b = a + a + b \Leftrightarrow b = 2a$

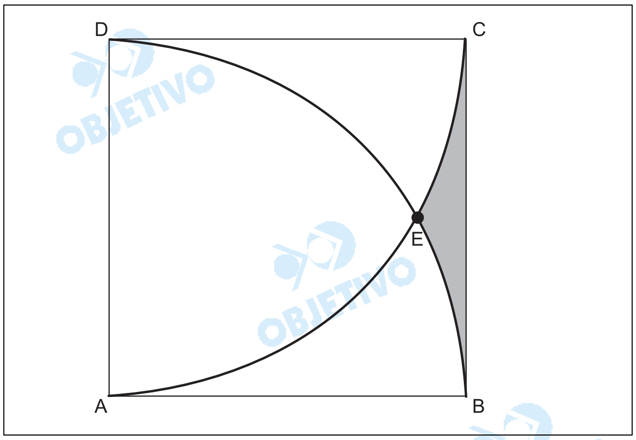
2) $(2^a, 16, 2^b, \dots)$ *é uma P.G.* $\Leftrightarrow 16^2 = 2^a \cdot 2^b$

3) De (1) e (2): $16^2 = 2^a \cdot 2^{2a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^8 = 2^{3a} \Leftrightarrow 3a = 8 \Leftrightarrow a = \dfrac{8}{3}$

32 **C**

Na figura, ABCD é um quadrado de lado 1, DEB e CEA são arcos de circunferências de raio 1. Logo, a área da região hachurada é



a) $1 - \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

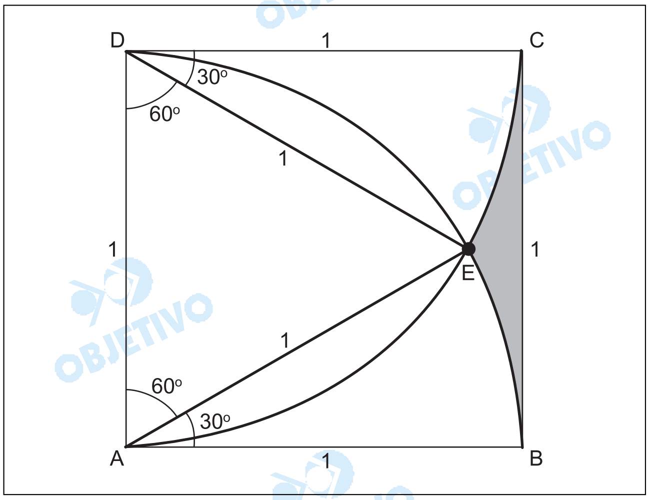
b) $1 - \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $1 - \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

d) $1 + \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $1 - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Resolução



Para calcularmos a área S da região assinalada, devemos calcular a área de um quadrado de lado 1 e desta área devemos subtrair a área de um triângulo eqüilátero de lado 1 e a área ocupada por dois setores circulares congruentes com ângulo central de 30° e raio 1.

Assim:

$$S = 1^2 - \frac{1^2\sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \frac{30°}{360°} \cdot \pi \cdot 1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = 1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Comentário

A prova de Matemática, como tradicionalmente acontece, priorizou a parte de álgebra e apresentou questões claras, bem enunciadas e clássicas, de nível médio. Uma bonita prova, que privilegiou o candidato que estudou.