NOTAÇÕES

C: conjunto dos números complexos.
Q: conjunto dos números racionais.
R: conjunto dos números reais.
Z: conjunto dos números inteiros.
$N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
$N^* = \{1, 2, 3, ...\}$.
$\emptyset$: conjunto vazio.
$A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$.
$[a, b] = \{x \in R; a \leq x \leq b\}$.
$]a, b[= \{x \in R; a < x < b\}$.
i: unidade imaginária; $i^2 = -1$.
$z = x + iy$, $x, y \in R$.
$\bar{z}$: conjugado do número complexo $z \in C$.
$|z|$: módulo do número complexo $z \in C$.
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B.
$m(\overline{AB})$: medida (comprimento) de $\overline{AB}$.

Questão 1

Considere os conjuntos $S = \{0, 2, 4, 6\}$, $T = \{1, 3, 5\}$ e $U = \{0, 1\}$ e as afirmações:
I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \emptyset$.
II. $\{2\} \subset S \setminus U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.
III. Existe uma função $f : S \to T$ injetiva.
IV. Nenhuma função $g : T \to S$ é sobrejetiva.

Então, é(são) verdadeira(s)
a) apenas I.
b) apenas IV.
c) apenas I e IV.
d) apenas II e III.
e) apenas III e IV.

alternativa B

I. Falsa, pois $\{0\} \notin S$.
II. Falsa, pois $S \cap T \cap U = \emptyset$.
III. Falsa. Temos que $n(S) = 4$ e $n(T) = 3$. Logo, como $n(S) > n(T)$, não existe função injetiva de S em T.
IV. Verdadeira. Temos que $n(T) = 3$ e $n(S) = 4$. Logo, como $n(T) < n(S)$, não existe função sobrejetiva de T em S.

Questão 2

Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de
a) R$ 17,50. b) R$ 16,50. c) R$ 12,50.
d) R$ 10,50. e) R$ 9,50.

alternativa D

Sejam x o preço do sanduíche, y o preço da xícara de café e z o preço do pedaço de torta. Então:

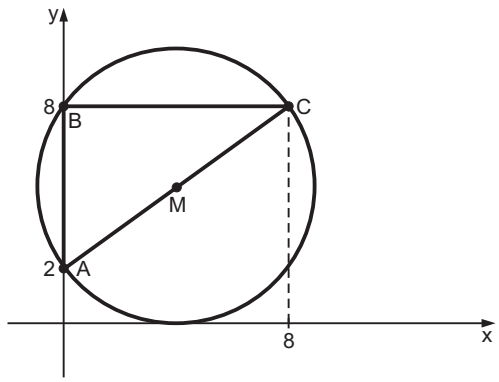
$$\begin{cases} 3x + 7y + z = 31{,}50 \quad (1) \\ 4x + 10y + z = 42{,}00 \quad (2) \end{cases}$$

De $3 \cdot (1) - 2 \cdot (2)$, temos $x + y + z = R\$\ 10{,}50$.

Questão 3

Uma circunferência passa pelos pontos $A = (0, 2)$, $B = (0, 8)$ e $C = (8, 8)$. Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são
a) (0, 5) e 6. b) (5, 4) e 5. c) (4, 8) e 5,5.
d) (4, 5) e 5. e) (4, 6) e 5.

alternativa D



O triângulo ABC é retângulo em B. Assim, a circunferência que passa pelos pontos A, B e C tem centro no ponto médio de $\overline{AC}$, $M = \left(\frac{0+8}{2}; \frac{2+8}{2}\right) =$ $= (4;5)$ e raio $\frac{1}{2} AC = \frac{1}{2}\sqrt{(8-0)^2 + (8-2)^2} = 5$.

Questão 4

Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que

a) $x \in]0, 2[$.
b) x é racional.
c) $\sqrt{2x}$ é irracional.
d) x^2 é irracional.
e) $x \in]2, 3[$.

alternativa B

Como $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}$, temos $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2$, que é racional.

Questão 5

Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado $\overline{AB}$ e E um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $m(\overline{AB}) = 8$ cm, $m(\overline{AC}) = 10$ cm, $m(\overline{AD}) = 4$ cm e $m(\overline{AE}) = 6$ cm, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é

a) $\frac{1}{2}$.
b) $\frac{3}{5}$.
c) $\frac{3}{8}$.
d) $\frac{3}{10}$.
e) $\frac{3}{4}$.

alternativa D

Seja α a medida do ângulo BÂC. Então:

$$\frac{\text{área } ADE}{\text{área } ABC} = \frac{\frac{AD \cdot AE \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}}{\frac{AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2}} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC} = \frac{4 \cdot 6}{8 \cdot 10} = \frac{3}{10}$$

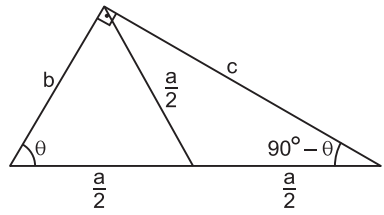
Questão 6

Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a

a) $\frac{4}{5}$.
b) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$.
c) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
d) $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$.
e) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

alternativa C

Num triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da mesma.



Como a medida dessa mediana é a média geométrica das medidas dos catetos, $\frac{a}{2} = \sqrt{bc} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = bc \Leftrightarrow \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2\theta = \frac{1}{2}.$$

Sendo θ o menor dos ângulos do triângulo, $2\theta = 30^o \Leftrightarrow \theta = 15^o$.

Assim, como $\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ e $\cos(90^o - \theta) = \operatorname{sen}\theta =$

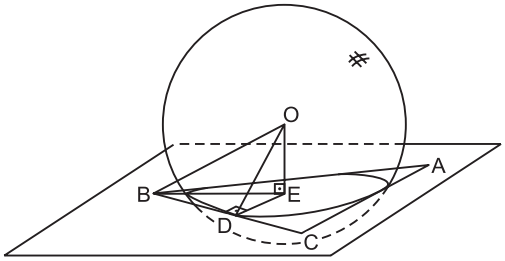
$= \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, o valor do co-seno de um dos ângulos do triângulo é igual a $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Questão 7

A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo.
Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

a) $3\sqrt{3}$.
b) 6.
c) 5.
d) 4.
e) $2\sqrt{5}$.

alternativa C



Sejam ABC o triângulo equilátero em questão, E o seu centro e O o centro da esfera.

Sendo D o ponto médio de $\overline{BC}$, $DE = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm e $BE = \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm.

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos DEO e BEO:

$$\begin{cases} OD^2 = OE^2 + DE^2 \\ OB^2 = BE^2 + OE^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow OB^2 = BE^2 + OD^2 - DE^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow OB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4^2 - (\sqrt{3})^2} = 5$ cm, *que é a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo.*

Questão 8

Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semi-esfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então n é igual a

a) 4. b) 3. c) 6. d) 5. e) 7.

alternativa C

Sendo que n *planos meridianos determinam* n *cunhas contidas em uma semi-esfera definida por um desses planos, o volume da n-ésima cunha é* $\frac{\pi r^3}{18} + (n-1) \cdot \frac{\pi r^3}{45} = n \cdot \frac{\pi r^3}{45} + \frac{\pi r^3}{30}$.

Desse modo, a soma dos volumes das n *cunhas é igual ao volume da semi-esfera de raio* r, *ou seja,* $\frac{\left(\frac{\pi r^3}{18} + \frac{n\pi r^3}{45} + \frac{\pi r^3}{30}\right) \cdot n}{2} = \frac{4\pi r^3}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 60 = 0 \Leftrightarrow n = 6.$

Questão 9

Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é 7200°. O número de vértices deste prisma é igual a

a) 11. b) 32. c) 10. d) 20. e) 22.

alternativa E

Supondo que as bases do prisma sejam n-ágonos, suas faces laterais são n *quadriláteros. Assim,* $2 \cdot (n-2) \cdot 180^o + n \cdot 360^o = 7\,200^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n - 2 + n = 20 \Leftrightarrow n = 11$. *O número de vértices do prisma é* $2n = 2 \cdot 11 = 22$.

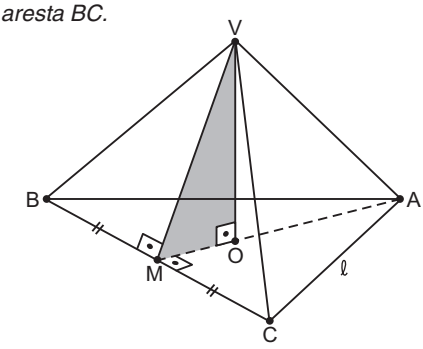
Questão 10

Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$ e $C = (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$. O volume do tetraedro é

a) $\frac{8}{3}$. b) 3. c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. e) 8.

alternativa A

Considere a seguir um tetraedro regular VABC de aresta ℓ, *centro O da base ABC e ponto médio M da aresta* $\overline{BC}$.



Como as faces do tetraedro são triângulos equiláteros e O é o centro da base, $OM = \frac{1}{3}\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$ *e* $VM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. *Do triângulo retângulo VOM temos* $(VO)^2 + (OM)^2 = (VM)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (VO)^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow VO = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}$.

Já que $\overline{VO}$ é altura do tetraedro relativa à base ABC, seu volume é $\frac{1}{3}\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\ell\sqrt{6}}{3}=\frac{\ell^3\cdot\sqrt{2}}{12}$.

A aresta ℓ do tetraedro regular pode ser obtida pela distância entre os vértices A e B. Logo $\ell = AB = \sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{2}$ *e o volume do tetraedro é* $\frac{(2\sqrt{2})^3\cdot\sqrt{2}}{12}=\frac{8}{3}$.

Questão 11

No desenvolvimento de $(ax^2-2bx+c+1)^5$ obtém-se um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes somam 32. Se 0 e –1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a+b+c$ é igual a

a) $-\frac{1}{2}$. b) $-\frac{1}{4}$. c) $\frac{1}{2}$. d) 1. e) $\frac{3}{2}$.

alternativa A

A soma dos coeficientes de um polinômio p(x) é igual a p(1). Considerando ainda que 0 e –1 são raízes de p(x) e assumindo que os coeficientes de p(x) são reais:

$$\begin{cases} p(1)=32 \\ p(0)=0 \\ p(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a\cdot 1^2-2b\cdot 1+c+1)^5=32 \\ (a\cdot 0^2-2b\cdot 0+c+1)^5=0 \\ (a(-1)^2-2b(-1)+c+1)^5=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+c+1=2 \\ c+1=0 \\ a+2b+c+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b+c=-\frac{1}{2}$$

Questão 12

O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é

a) 2499. b) 2501. c) 2500.
d) 3600. e) 4900.

alternativa B

Para $n \geq 1$, $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$. *Desse modo,* $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0{,}01 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{n}+\sqrt{n-1}>-0{,}01 \text{ e } \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}<0{,}01 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{n}+\sqrt{n-1}>100$ *e, assim,*

$$2\sqrt{n-1}>100-0{,}01 \Leftrightarrow 4(n-1)>(100-0{,}01)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(n-1)>10000-2 \Leftrightarrow n-1>2\,499{,}5 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n > 2\,500{,}5$.

Como $\sqrt{2\,501}+\sqrt{2\,501-1}>50+50=100$, *o menor inteiro positivo que satisfaz a inequação dada é 2 501.*

Questão 13

Seja $D = R \setminus \{1\}$ e $f: D \to D$ uma função dada por

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}.$$

Considere as afirmações:

I. f é injetiva e sobrejetiva.

II. f é injetiva, mas não sobrejetiva.

III. $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$, para todo $x \in D$, $x \neq 0$.

IV. $f(x)\cdot f(-x)=1$, para todo $x \in D$.

Então, são verdadeiras

a) apenas I e III. b) apenas I e IV.
c) apenas II e III. d) apenas I, III e IV.
e) apenas II, III e IV.

alternativa A

- *Sendo $x_1, x_2 \in R-\{1\}$,* $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1}=\frac{x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_1+1)\cdot(x_2-1)=$$

$$=(x_2+1)\cdot(x_1-1) \Leftrightarrow x_1x_2-x_1+x_2-1=$$

$= x_1x_2+x_1-x_2-1 \Leftrightarrow x_1=x_2$, *ou seja,* f *é injetiva.*

- *Dado $y \in R-\{1\}$,*

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}=y \Leftrightarrow x+1=y(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-1)x=y+1 \Leftrightarrow x=\frac{y+1}{y-1}.$$

Portanto existe $x \in R-\{1\}$ tal que $f(x)=y$, isto é, f *é sobrejetiva.*

- *Para $x \in R^*-\{1\}$,*

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{\frac{1+x}{x}}{\frac{1-x}{x}}=$$

$$=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+1}{x-1}=0.$$

- *Para $x=-1$, $-x \notin D$. Logo não é verdade que $f(x)\cdot f(-x)=1$, para todo $x \in D$.*

Conseqüentemente, apenas I e III são verdadeiras.

Questão 14

O número complexo $2 + i$ é raiz do polinômio

$$f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q,$$

com $p, q \in R$. Então, a alternativa que mais se aproxima da soma das raízes reais de f é

a) 4. b) –4. c) 6. d) 5. e) –5.

alternativa E

Como $f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q$ é um polinômio de coeficientes reais, se $2 + i$ é raiz desse polinômio, então $2 - i$ também será. Logo $f(x) = (x^2 - 4x + 5) \cdot (ax^2 + bx + c)$. Assim,

$(x^2 - 4x + 5) \cdot (ax^2 + bx + c) =$

$= x^4 + x^3 + px^2 + x + q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax^4 - (4a - b) \cdot x^3 + (5a - 4b + c) \cdot x^2 +$

$+ (5b - 4c) \cdot x + 5c = x^4 + x^3 + px^2 + x + q.$

Dessa forma, $\begin{vmatrix} a = 1 \\ -(4a - b) = 1 \\ 5b - 4c = 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{vmatrix}$.

As raízes reais de $f(x)$ são as raízes de $ax^2 + bx + c = x^2 + 5x + 6$, ou seja, -2 e -3, cuja soma é -5.

Questão 15

Considere a equação em x

$$a^{x+1} = b^{1/x},$$

onde a e b são números reais positivos, tais que $\ln b = 2 \ln a > 0$. A soma das soluções da equação é

a) 0. b) –1. c) 1. d) ln 2. e) 2.

alternativa B

Sendo a e b números reais positivos,

$\ell n\, b = 2 \ell n\, a \Leftrightarrow \ell n\, b = \ell n\, a^2 \Leftrightarrow b = a^2$.

Assim, $a^{x+1} = b^{1/x} \Leftrightarrow a^{x+1} = (a^2)^{1/x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 1 = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ *ou* $x = -2$, *cuja soma é* -1.

Questão 16

O intervalo $I \subset R$ que contém todas as soluções da inequação

$$\arctan \frac{1 + x}{2} + \arctan \frac{1 - x}{2} \geq \frac{\pi}{6}$$

é

a) [–1, 4]. b) [–3, 1]. c) [–2, 3].
d) [0, 5]. e) [4, 6].

alternativa C

Sejam $\theta_1 = arc\ tg \frac{1 + x}{2}$ *e* $\theta_2 = arc\ tg \frac{1 - x}{2}$.

Então $tg(\theta_1 + \theta_2) = \frac{tg\theta_1 + tg\theta_2}{1 - tg\theta_1 \cdot tg\theta_2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow tg(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\frac{1 + x}{2} + \frac{1 - x}{2}}{1 - \frac{1 + x}{2} \cdot \frac{1 - x}{2}} = \frac{4}{x^2 + 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < tg(\theta_1 + \theta_2) \leq \frac{4}{3}.$$

Como $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ *e* $-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, $-\pi < \theta_1 +$

$+ \theta_2 < \pi$ *e, portanto,* $-\pi < \theta_1 + \theta_2 \leq -\pi + arc\ tg \frac{4}{3}$

ou $0 < \theta_1 + \theta_2 \leq arc\ tg \frac{4}{3}$.

Vamos demonstrar que $\theta_1 + \theta_2 > 0$.

Temos que $\frac{1 + x}{2} < 0 \Leftrightarrow x < -1$ *e* $\frac{1 - x}{2} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > 1$. *Logo não existe* x *tal que* $\theta_1 < 0$ *e* $\theta_2 < 0$

e podemos concluir que $\theta_1 + \theta_2 > -\frac{\pi}{2} >$

$> -\pi + arc\ tg \frac{4}{3}$.

Logo $0 < \theta_1 + \theta_2 \leq arc\ tg \frac{4}{3}$ *e* $arc\ tg \frac{1 + x}{2} +$

$+ arc\ tg \frac{1 - x}{2} \geq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow tg(\theta_1 + \theta_2) \geq tg \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x^2 + 3} \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x^2 \leq 4\sqrt{3} - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{4\sqrt{3} - 3} \leq x \leq \sqrt{4\sqrt{3} - 3}.$$

Como $1 < 4\sqrt{3} - 3 < 4 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{4\sqrt{3} - 3} < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 < -\sqrt{4\sqrt{3} - 3} < -1$, *o único intervalo apresentado que contém todas as soluções da inequação dada é o da alternativa C.*

Questão 17

Seja $z \in C$ com $|z| = 1$. Então, a expressão $\left|\frac{1 - \bar{z}w}{z - w}\right|$ assume valor

a) maior que 1, para todo w com $|w| > 1$.
b) menor que 1, para todo w com $|w| < 1$.
c) maior que 1, para todo w com $w \neq z$.
d) igual a 1, independente de w com $w \neq z$.
e) crescente para $|w|$ crescente, com $|w| < |z|$.

alternativa D

Sendo $|z| = 1$ e $w \neq z$,

$$\left|\frac{1-\bar{z}w}{z-w}\right| = |z| \cdot \left|\frac{1-\bar{z}w}{z-w}\right| = \left|\frac{z - z\cdot\bar{z}w}{z-w}\right| =$$

$$= \left|\frac{z - |z|^2 \cdot w}{z-w}\right| = \left|\frac{z-w}{z-w}\right| = 1.$$

Questão 18

O sistema linear

$$\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$$

não admite solução se e somente se o número real b for igual a

a) –1. b) 0. c) 1. d) 2. e) –2.

alternativa A

$$\begin{vmatrix} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x = 1 - bz \\ bx + y = 1 \\ by + z = 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x = 1 - bz \\ y - b^2z = 1 - b \\ by + z = 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x = 1 - bz \\ y = 1 - b + b^2z \\ (b^3 + 1)\cdot z = b^2 - b + 1 \end{vmatrix}$$

Assim, o sistema não admite solução se, e somente se, $b^3 + 1 = 0$ e $b^2 - b + 1 \neq 0$, ou seja, para $b = -1$.

Questão 19

Retiram-se 3 bolas de uma urna que contém 4 bolas verdes, 5 bolas azuis e 7 bolas brancas. Se P_1 é a probabilidade de não sair bola azul e P_2 é a probabilidade de todas as bolas saírem com a mesma cor, então a alternativa que mais se aproxima de $P_1 + P_2$ é

a) 0,21. b) 0,25. c) 0,28.
d) 0,35. e) 0,40.

alternativa E

Não está explícito no enunciado se as bolas são retiradas com ou sem reposição. Resolveremos o problema em ambos os casos.

- Sem reposição:

Há $\binom{4+5+7}{3} = \binom{16}{3} = \frac{16\cdot 15\cdot 14}{3!} = 560$ *possibilidades de sortear as três bolas.*

Para não sair bola azul, consideramos apenas as bolas brancas ou verdes. Então há $\binom{4+7}{3} =$

$= \binom{11}{3} = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{3!} = 165$ *possibilidades de não sair bola azul.*

Assim, $P_1 = \frac{165}{560}$.

O número de possibilidades de ocorrerem 3 bolas de mesma cor é $\binom{4}{3} = 4$ *para as verdes,* $\binom{5}{3} = 10$ *para as azuis e* $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} = 35$ *para as brancas.*

Então $P_2 = \frac{4 + 10 + 35}{560} = \frac{49}{560}$.

Portanto $P_1 + P_2 = \frac{165 + 49}{560} = \frac{214}{560} \cong 0{,}382$.

- Com reposição:

Há $16^3 = 4\,096$ *possibilidades de sortear as três bolas. Então* $P_1 = \frac{11^3}{4\,096}$ *e* $P_2 = \frac{4^3 + 5^3 + 7^3}{4\,096}$.

Portanto

$$P_1 + P_2 = \frac{11^3 + 4^3 + 5^3 + 7^3}{4\,096} = \frac{1\,863}{4\,096} \cong 0{,}455.$$

Nos dois casos, a alternativa que mais se aproxima de $P_1 + P_2$ *é a E.*

Questão 20

A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos (1, 0) e (0, –2) são, respectivamente,

a) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$. b) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$. d) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ver comentário

Toda elipse com centro na origem pode ser obtida através da rotação de uma elipse de equação $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. *Seja* α *um ângulo de rotação. Como* $(x; y)\cdot e^{i\alpha} = (x + yi)(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\alpha) =$

$= (x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\alpha) + (x\,\mathrm{sen}\alpha + y\cos\alpha)i$, toda elipse com centro na origem admite uma equação na forma

$$\frac{(x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\alpha)^2}{b^2} + \frac{(x\,\mathrm{sen}\alpha + y\cos\alpha)^2}{a^2} = 1,$$

$a, b \in R_+^*$, $\alpha \in [0; \pi[$.

Como (1; 0) e (0; –2) pertencem à elipse,

$$\begin{cases} \frac{(1\cdot\cos\alpha - 0\cdot\mathrm{sen}\alpha)^2}{b^2} + \frac{(1\cdot\mathrm{sen}\alpha + 0\cdot\cos\alpha)^2}{a^2} = 1 \\ \frac{(0\cdot\cos\alpha - (-2)\cdot\mathrm{sen}\alpha)^2}{b^2} + \frac{(0\cdot\mathrm{sen}\alpha + (-2)\cdot\cos\alpha)^2}{a^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{a^2} = 1 \\ \frac{4\,\mathrm{sen}^2\alpha}{b^2} + \frac{4\cos^2\alpha}{a^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{b^2}\cdot(1 - 2\,\mathrm{sen}^2\alpha) = 4 - 5\,\mathrm{sen}^2\alpha \\ \frac{4}{a^2}\cdot(1 - 2\,\mathrm{sen}^2\alpha) = 1 - 5\,\mathrm{sen}^2\alpha \end{cases} \quad (*)$$

Supondo $1 - 2\,\mathrm{sen}^2\alpha \neq 0$, $4 - 5\,\mathrm{sen}^2\alpha \neq 0$ e $1 - 5\,\mathrm{sen}^2\alpha \neq 0$:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{4(1 - 2\,\mathrm{sen}^2\alpha)}{1 - 5\,\mathrm{sen}^2\alpha} \\ b^2 = \frac{4(1 - 2\,\mathrm{sen}^2\alpha)}{4 - 5\,\mathrm{sen}^2\alpha} \end{cases}$$

Para que existam a e b positivos satisfazendo o sistema, devemos ter:

$$\begin{cases} \frac{1 - 2\,\mathrm{sen}^2\alpha}{1 - 5\,\mathrm{sen}^2\alpha} > 0 \\ \frac{1 - 2\,\mathrm{sen}^2\alpha}{4 - 5\,\mathrm{sen}^2\alpha} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{sen}^2\alpha < \frac{1}{5} \text{ ou } \mathrm{sen}^2\alpha > \frac{1}{2} \\ \mathrm{sen}^2\alpha < \frac{1}{2} \text{ ou } \mathrm{sen}^2\alpha > \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sen}^2\alpha < \frac{1}{5} \text{ ou } \mathrm{sen}^2\alpha > \frac{4}{5}$$

Para $0 \leq \mathrm{sen}^2\alpha < \frac{1}{5}$, temos que b^2 é limitado, pois $b^2 = \frac{8}{5} - \frac{12}{5(4 - 5\,\mathrm{sen}^2\alpha)}$ e

$$0 \leq \mathrm{sen}^2\alpha < \frac{1}{5} \Leftrightarrow 3 < 4 - 5\,\mathrm{sen}^2\alpha \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{5} - \frac{12}{5\cdot 3} < \frac{8}{5} - \frac{12}{5(4 - 5\,\mathrm{sen}^2\alpha)} \leq \frac{8}{5} - \frac{12}{5\cdot 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5} < b^2 \leq 1.$$

Tomando valores de α tais que $\mathrm{sen}^2\alpha$ é próximo de $\frac{1}{5}$, podemos obter valores arbitrariamente grandes para a^2. Lembrando que $c^2 = a^2 - b^2$, a distância focal 2c pode ser arbitrariamente grande, assumindo infinitos valores.

Observação: supondo que os eixos da elipse estão sobre os eixos coordenados, ou seja, que $\alpha = 0$, obtemos $a^2 = \frac{4(1 - 2\cdot 0)}{1 - 5\cdot 0} = 4$ e

$b^2 = \frac{4(1 - 2\cdot 0)}{4 - 5\cdot 0} = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2c = 2\sqrt{3}$ e excentricidade $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

Questão 21

Seja $a_1, a_2, \ldots$ uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2, \text{ para } n \in N^*.$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

Resposta

Temos que

$$\sum_{k=1}^{1} a_{3k} = 1\cdot\sqrt{2} + \pi\cdot 1^2 \Leftrightarrow a_3 = \sqrt{2} + \pi \text{ e}$$

$$\sum_{k=1}^{2} a_{3k} = 2\cdot\sqrt{2} + \pi\cdot 2^2 \Leftrightarrow a_3 + a_6 = 2\sqrt{2} + 4\pi.$$

Assim, sendo r a razão da progressão aritmética:

$$\begin{cases} a_3 = \sqrt{2} + \pi \\ a_3 + a_6 = 2\sqrt{2} + 4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = \sqrt{2} + \pi \\ a_6 = \sqrt{2} + 3\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2r = \sqrt{2} + \pi \\ a_1 + 5r = \sqrt{2} + 3\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{2\pi}{3} \\ a_1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Questão 22

Seja C a circunferência de centro na origem, passando pelo ponto $P = (3, 4)$. Se t é a reta tangente a C por P, determine a circunferência C' de menor raio, com centro sobre o eixo x e tangente simultaneamente à reta t e à circunferência C.

Resposta

Sendo O = (0; 0) o centro da circunferência C e P = (3; 4), o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{OP}$ é $\frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$. Como a reta t *é tangente a C por P, seu coeficiente angular é $-\frac{3}{4}$ e a equação da reta* t *é* $y - 4 = -\frac{3}{4} \cdot (x - 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x + 4y - 25 = 0.$

Seja r *o raio da circunferência C' que tem centro no eixo* x *e é tangente simultaneamente à reta* t *e à circunferência C, cujo raio é* $\sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$.

O centro da circunferência C' de menor raio é o ponto O' = (r + 5; 0) e a distância de O' à reta t *vale* r, *ou seja,* $\frac{|3 \cdot (r+5) + 4 \cdot 0 - 25|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |3r - 10| = 5r \Leftrightarrow r = \frac{5}{4}$.

Assim, a circunferência C' de centro no eixo x *e tangente simultaneamente à reta* t *e à circunferência C é única com raio* $r = \frac{5}{4}$ *e centro* $\left(5 + \frac{5}{4}; 0\right) = \left(\frac{25}{4}; 0\right)$.

Questão 23

Sejam A e B matrizes 2×2 tais que $AB = BA$ e que satisfazem à equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se B é inversível, mostre que
(a) $AB^{-1} = B^{-1}A$ e que (b) A é inversível.

Resposta

Sendo B inversível:

a) $AB = BA \Leftrightarrow AB \cdot B^{-1} = BA \cdot B^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = BAB^{-1} \Leftrightarrow B^{-1} \cdot A = B^{-1} \cdot BAB^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B^{-1}A = AB^{-1}$

b) $A^2 + 2AB - B = 0 \Leftrightarrow B = A(A + 2B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det B = \det A \cdot \det (A + 2B)$

Se A não for inversível, então det A = 0. Da equação anterior, se det A = 0, então det B = 0, ou seja, B não seria inversível, absurdo.

Logo A é inversível.

Observação: *vamos mostrar que existem matrizes A e B nas condições do enunciado. Tomando A = I, temos* $I \cdot B = B \cdot I$ *e* $I^2 + 2 \cdot I \cdot B - B = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B = -I$. *Podemos tomar A = I e B = –I.*

Questão 24

Seja n o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de $n - 1$ ângulos (internos) do polígono é 2004°, determine o número n de lados do polígono.

Resposta

Como a soma de n – 1 ângulos internos do polígono convexo é $2\,004^o$, *a medida do seu ângulo interno não somado é* $(n - 2) \cdot 180^o - 2\,004^o =$

$= 180^o \cdot n - 2\,364^o$.

Assim, $0^o < 180^o \cdot n - 2\,364^o < 180^o \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2\,364}{180} < n < \frac{2\,544}{180} \Leftrightarrow n = 14.$

Questão 25

a) Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

b) Conclua de (a) que α é um número racional.

Resposta

a) $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha^3 = (\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}})^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3 = (\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}})^3 + (\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}})^3 +$

$+3 \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \, (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{2^2 - (\sqrt{5})^2} \cdot \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$

Logo α *é raiz da equação* $x^3 + 3x - 4 = 0$.

b) Temos que 1 é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Utilizando Briot-Ruffini,

	1	0	3	–4
1	1	1	4	0

,

ou seja, $x^3 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x^2 + x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-1 + i\sqrt{15}}{2} \text{ ou } x = \dfrac{-1 - i\sqrt{15}}{2}. \end{cases}$$

Portanto 1 é a única raiz real da equação dada e, como α é real, $\alpha = 1$. Assim, α é um número racional.

Questão 26

Considere a equação em $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{1 + mx} = x + \sqrt{1 - mx},$$

sendo m um parâmetro real.

a) Resolva a equação em função do parâmetro m.

b) Determine todos os valores de m para os quais a equação admite solução não nula.

Resposta

a) Para todo m *real, $x = 0$ é solução da equação $\sqrt{1 + mx} = x + \sqrt{1 - mx}$. Então, para $x \neq 0$,*

$\sqrt{1 + mx} = x + \sqrt{1 - mx} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{1 + mx} - \sqrt{1 - mx} = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2mx = x \cdot (\sqrt{1 + mx} + \sqrt{1 - mx}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{1 + mx} + \sqrt{1 - mx} = 2m \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2 \cdot \sqrt{1 - m^2x^2} = 4m^2 \\ 1 + mx \geq 0 \\ 1 - mx \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 - m^2x^2} = 2m^2 - 1 \\ 1 + mx \geq 0 \\ 1 - mx \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2x^2 = (2m^2 - 1)^2 \\ 1 + mx \geq 0 \\ 1 - mx \geq 0 \\ m \geq 0 \\ 2m^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Como $1 - m^2x^2 = (1 - mx)(1 + mx) \geq 0$, para verificar se ocorrem as duas desigualdades $1 + mx \geq 0$ e $1 - mx \geq 0$, é suficiente verificar somente uma delas. Assim,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 - 4m^2 \\ 1 + mx \geq 0 \text{ ou } 1 - mx \geq 0 \\ m \geq 0 \\ m \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } m \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{1 - m^2} \text{ ou } x = -2\sqrt{1 - m^2} \\ 1 + mx \geq 0 \text{ ou } 1 - mx \geq 0 \\ m \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - m^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{1 - m^2} \text{ ou } x = -2\sqrt{1 - m^2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 1 \end{cases}$$

Logo para $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1$, $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ou } x = 2\sqrt{1 - m^2} \text{ ou } x = -2\sqrt{1 - m^2}\}$ e para os demais valores de m, *$V = \{0\}$.*

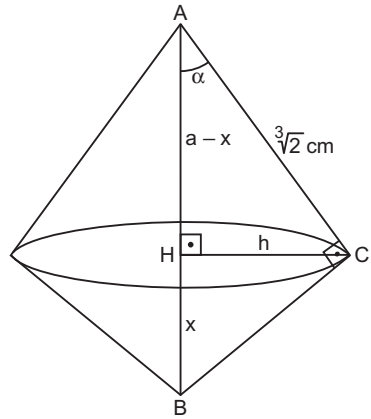
b) Os valores de m *para os quais a equação admite solução não nula são tais que $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1$.*

Questão 27

Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é π cm^3. Determine os ângulos deste triângulo.

Resposta

Sejam a *e* h, *respectivamente, as medidas da hipotenusa e da altura relativa à hipotenusa do triângulo ABC, retângulo em C, com $AC = \sqrt[3]{2}$ cm. O sólido gerado pela rotação do triângulo em torno da hipotenusa é a união de dois cones de raio da base* h *e alturas* x *e $a - x$, indicadas na figura.*



Sendo o volume do sólido gerado igual a π cm^3, $\frac{1}{3}\pi h^2 x + \frac{1}{3}\pi h^2 (a - x) = \pi \Leftrightarrow h^2 a = 3$. $(*)$

No triângulo retângulo AHC, $\frac{h}{\sqrt[3]{2}} = \text{sen}\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = \sqrt[3]{2}\,\text{sen}\alpha$. *No triângulo ABC,* $\frac{\sqrt[3]{2}}{a} = \cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt[3]{2}}{\cos\alpha}$. *Substituindo em* $(*)$, *obtemos:*

$(\sqrt[3]{2}\,\text{sen}\alpha)^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\cos\alpha} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\,\text{sen}^2\alpha = 3\cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(1 - \cos^2\alpha) = 3\cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$ *ou* $\cos\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = 60^o$.

Assim, os ângulos do triângulo retângulo dado são 90°, 60° *e* 30°.

Questão 28

São dados dois cartões, sendo que um deles tem ambos os lados na cor vermelha, enquanto o outro tem um lado na cor vermelha e o outro lado na cor azul. Um dos cartões é escolhido ao acaso e colocado sobre uma mesa. Se a cor exposta é vermelha, calcule a probabilidade de o cartão escolhido ter a outra cor também vermelha.

Resposta

Vamos representar por V_1V_2 o cartão de lados vermelhos e V_3A o cartão vermelho e azul. Como o cartão escolhido tem um lado exposto na cor vermelha, esse lado pode ser V_1, V_2 ou V_3. Assim, das 3 possibilidades, 2 possuem o outro lado vermelho e, portanto, a probabilidade pedida é $\frac{2}{3}$.

Questão 29

Obtenha todos os pares (x, y), com $x, y \in [0, 2\pi]$, tais que

$$\text{sen}\,(x+y) + \text{sen}\,(x-y) = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\,x + \cos y = 1$$

Resposta

$$\begin{cases} \text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \\ \text{sen}\,x + \cos y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\,\text{sen}\,x\cos y = \frac{1}{2} \\ \text{sen}\,x + \cos y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,x + \cos y = 1 \\ \text{sen}\,x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (*)$$

Considere a equação, cuja soma das raízes é 1 e o produto é $\frac{1}{4}$, $t^2 - t + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. *Assim,*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,x = \frac{1}{2} \\ \cos y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ e, para } x, y \in [0; 2\pi],$$

$$\left(x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}\right) e \left(y = \frac{\pi}{3} \text{ ou } y = \frac{5\pi}{3}\right).$$

Logo os possíveis pares (x; y) são $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{3}\right)$.

Questão 30

Determine todos os valores reais de a para os quais a equação

$$(x-1)^2 = |x - a|$$

admita exatamente três soluções distintas.

Resposta

Considerando como universo o conjunto dos reais:

$$(x-1)^2 = |x-a| \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = x - a \\ \text{ou} \\ -(x-1)^2 = x - a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 + a = 0 \quad (1) \\ \text{ou} \\ x^2 - x + 1 - a = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Os discriminantes de (1) e (2) são, respectivamente, $\Delta_1 = (-3)^2 - 4(1+a) = 5 - 4a$ *e*

$\Delta_2 = (-1)^2 - 4(1-a) = 4a - 3$.

A equação tem exatamente três soluções reais distintas se, e somente se, $\Delta_1 \geq 0$, $\Delta_2 \geq 0$ *e ocorre uma das seguintes situações:*

i) (1) e (2) têm exatamente uma raiz comum e duas raízes distintas.

ii) (1) e (2) não têm raízes comuns, (1) tem duas soluções distintas e (2) tem raiz dupla.

iii) (1) e (2) não têm raízes comuns, (2) tem duas soluções distintas e (1) tem raiz dupla.

No caso i), seja r *a raiz comum.*

Devemos ter, então, $\Delta_1 > 0 \Leftrightarrow a < \frac{5}{4}$, $\Delta_2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a > \frac{3}{4}$ e $\begin{vmatrix} r^2 - 3r + 1 + a = 0 \\ r^2 - r + 1 - a = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a = r^2 - r + 1 \\ r^2 - 3r + 1 + r^2 - r + 1 = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a = 1 \\ r = 1 \end{vmatrix}$

Além disso, nota-se que (1) e (2) não podem ter duas raízes comuns.

No caso ii) devemos ter $5 - 4a > 0$ *e* $4a - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a < \frac{5}{4}$ e $a = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{3}{4}\left(\text{raízes } \frac{1}{2}, \frac{3-\sqrt{2}}{2}, \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)$.

No caso iii) devemos ter $5 - 4a = 0$ *e* $4a - 3 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{5}{4}$ e $a > \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{5}{4}\left(\text{raízes } \frac{3}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Logo $a = \frac{3}{4}$ *ou* $a = 1$ *ou* $a = \frac{5}{4}$.