Questão 19

Para dar R$ 1,80 de troco a um cliente, o caixa de um supermercado pretende usar exatamente 20 moedas. Se ele dispõe apenas de moedas de 5 centavos, 10 centavos e 25 centavos, de quantos modos distintos ele pode compor tal quantia?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

alternativa C

Sejam x, y, z ∈ N os totais de moedas de 5, 10 e 25 centavos que serão dadas de troco. Então, como R$ 1,80 são 180 centavos:

$$\begin{cases} 5x + 10y + 25z = 180 \\ x + y + z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 4z = 16 \\ x = 20 - y - z \end{cases}$$

Logo, considerando os possíveis valores de z, podemos ter (x; y; z) igual a (4; 16; 0), (7; 12; 1), (10; 8; 2), (13; 4; 3) ou (16; 0; 4), isto é, há 5 modos distintos de compor tal quantia.

Questão 20

Quando colocou 46,2 litros de gasolina no tanque de seu carro, Horácio observou que o ponteiro do marcador, que antes indicava estar ocupado $\frac{1}{5}$ da capacidade do tanque, passou a indicar $\frac{3}{4}$. Nessas condições, é correto afirmar que a capacidade total desse tanque, em litros, é

a) 70 b) 84 c) 90 d) 96 e) 120

alternativa B

Seja x a capacidade total do tanque, em litros. Assim, $\frac{3}{4}x - \frac{1}{5}x = 46{,}2 \Leftrightarrow x = 84$ *litros.*

Questão 21

Se x e y são números reais tais que $\log_8 2^x = y + 1$ e $\log_3 9^y = x - 9$, então x − y é igual a

a) 5 b) 8 c) 10 d) 12 e) 15

alternativa E

Temos:

$$\begin{cases} \log_8 2^x = y + 1 \\ \log_3 9^y = x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2^{3y+3} \\ 3^{2y} = 3^{x-9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 3 \\ 2y = x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 6 \end{cases}$$

Assim, $x - y = 21 - 6 = 15$.

Questão 22

Considere as seqüências (1, 4, 7, 10, ..., 67) e (8, 12, 16, 20, ..., 104). O número de termos comuns a essas duas progressões é

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

alternativa A

Admitindo que as seqüências dadas sejam progressões aritméticas, os termos da PA (1, 4, 7, 10, ..., 67) são da forma $3n + 1$, $n \in N$, $0 \le n \le 22$, *e os termos da PA (8, 12, 16, 20, ..., 104) são da forma* $4k$, $k \in N$, $2 \le k \le 26$.

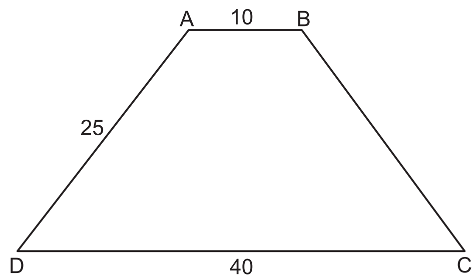
Assim, os termos comuns são tais que $3n + 1 = 4k \Leftrightarrow n = \frac{4k-1}{3}$, *com* $\frac{4k-1}{3} \le 22 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \le k \le 16$.

Logo $n = \frac{4k-1}{3} = k + \frac{k-1}{3}$ *é inteiro para k igual a 4, 7, 10, 13 ou 16, ou seja, as seqüências têm 5 termos comuns.*

Questão 23

A figura abaixo representa um terreno com a forma de um trapézio isósceles, cujas dimensões indicadas são dadas em metros.

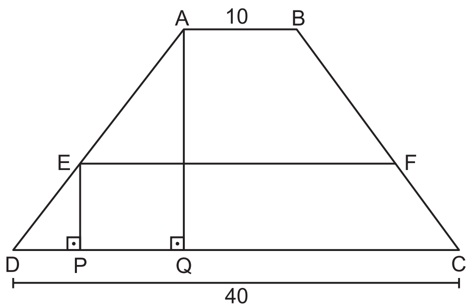


Pretende-se construir uma cerca paralela ao lado $\overline{AB}$, de modo a dividir o terreno em duas superfícies de áreas iguais. O comprimento dessa cerca, em metros, deverá ser aproximadamente igual a

a) 26 b) 29 c) 33 d) 35 e) 37

alternativa B

Na figura, $\overline{EF}$ representa a cerca que se pretende construir.



Seja EF = x. Como os trapézios ABCD e EFCD são isósceles, $DQ = \frac{40-10}{2} = 15$ *e* $DP = \frac{40-x}{2}$.

Sejam AQ = H e EP = h as alturas dos trapézios ABCD e EFCD, respectivamente. Pelo caso AA, os triângulos EDP e ADQ são semelhantes. Logo

$$\frac{EP}{AQ} = \frac{DP}{DQ} \Leftrightarrow \frac{h}{H} = \frac{\frac{40-x}{2}}{15} \Leftrightarrow \frac{h}{H} = \frac{40-x}{30}.$$

A área de EFCD é metade da área de ABCD, isto é, $h \cdot \left(\frac{40+x}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot H \cdot \left(\frac{40+10}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{h}{H}(40+x) = 25 \Leftrightarrow \frac{(40-x)}{30} \cdot (40+x) = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{850} \cong 29 \text{ m}.$$

Questão 24

Numa visita ao zoológico, Zilá levou algumas bananas que distribuiu a três macacos. Ao primeiro, deu a metade do que levou e mais meia banana; ao segundo, a metade do restante e mais meia banana; ao terceiro, a metade do restante e mais meia banana. Se, assim, ela distribuiu todas as bananas que havia levado, quantas recebeu o segundo macaco?

a) 8 b) 5 c) 4 d) 2 e) 1

alternativa D

Sendo x o número total de bananas, o primeiro macaco recebeu $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$ *bananas, o segundo recebeu* $\frac{x - \left(\frac{x+1}{2}\right)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$ *bananas e o terceiro* $\frac{x - \left(\frac{x+1}{2}\right) - \left(\frac{x+1}{4}\right)}{2} + \frac{1}{2} =$

$= \frac{x+1}{8}$ *bananas.*

Assim, como ela distribuiu todas as bananas, $x = \frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} \Leftrightarrow x = 7$ *e o segundo macaco recebeu* $\frac{7+1}{4} = 2$ *bananas.*

Questão 25

Considere que o material usado na confecção de um certo tipo de tapete tem um custo de R$ 40,00. O fabricante pretende colocar cada tapete à venda por x reais e, assim, conseguir vender (100 – x) tapetes por mês. Nessas condições, para que, mensalmente, seja obtido um lucro máximo, cada tapete deverá ser vendido por

a) R$ 55,00 b) R$ 60,00 c) R$ 70,00
d) R$ 75,00 e) R$ 80,00

alternativa C

O lucro obtido com cada tapete é x – 40 reais. Assim, o lucro total do fabricante é f(x) =
= (100 – x)(x – 40) reais, $40 \le x \le 100$.
Como f(x) tem raízes 40 e 100 e concavidade para baixo o lucro máximo é obtido para $x = \frac{40+100}{2} =$ *R\$ 70,00.*

Questão 26

Aser, Bia, Cacá e Dedé fazem parte de um grupo de 8 pessoas que serão colocadas lado a lado para tirar uma única fotografia. Se os lugares em que eles ficarão posicionados forem aleatoriamente escolhidos, a probabilidade de que, nessa foto, Aser e Bia apareçam um ao lado do outro e Cacá e Dedé não apareçam um ao lado do outro será

a) $\frac{5}{28}$ b) $\frac{3}{14}$ c) $\frac{7}{28}$ d) $\frac{2}{7}$ e) $\frac{9}{28}$

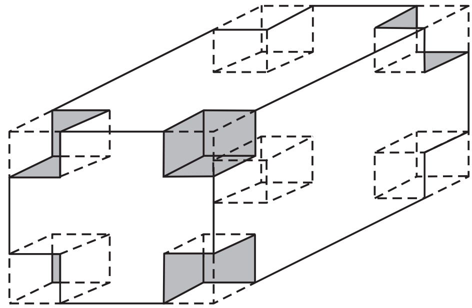
alternativa A

Há 8! fotografias possíveis.
Para obter o número de fotografias nas quais Aser e Bia aparecem um ao lado do outro, consideramos tal par como uma única pessoa, ou seja, tomamos o total de permutações de 7 objetos e multiplicamos por 2!, o número de maneiras de introduzir tal par nessa permutação. Conseqüentemente são $7! \cdot 2!$ fotografias com Aser e Bia juntos. Analogamente, o número de fotografias nas quais Aser e Bia aparecem juntos e Cacá e Dedé também aparecem juntos é $6! \cdot 2! \cdot 2!$. Assim, há $7! \cdot 2! - 6! \cdot 2! \cdot 2!$ fotografias nas quais Aser e Bia aparecem um ao lado do outro e Cacá e Dedé não.
A probabilidade pedida é, portanto,

$$\frac{7! \cdot 2! - 6! \cdot 2! \cdot 2!}{8!} = \frac{6! \cdot 2! \cdot (7-2)}{8!} = \frac{5}{28}.$$

Questão 27

Para obter a peça esboçada na figura abaixo, um artesão deve recortar 8 cubos iguais, a partir dos vértices de um bloco maciço de madeira que tem as seguintes dimensões: 25 cm x 18 cm x 18 cm.



Se ele pretende que o peso da peça obtida seja 6,603 kg e sabendo que a densidade da madeira é 0,93 g/cm^3, a aresta de cada cubo recortado deverá medir, em centímetros,

a) 6,5 b) 6 c) 5,5 d) 5 e) 4,5

alternativa D

O bloco possui um volume de $25 \cdot 18 \cdot 18 = 8\,100$ cm^3. A peça feita pelo artesão terá um volume de $\frac{6\,603 \text{ g}}{0{,}93 \text{ g/cm}^3} = 7\,100$ cm^3. Assim, cada um dos 8 cubos retirados terá um volume de $\frac{8\,100 - 7\,100}{8} = 125$ cm^3 e, portanto, uma aresta de $\sqrt[3]{125} = 5$ cm.