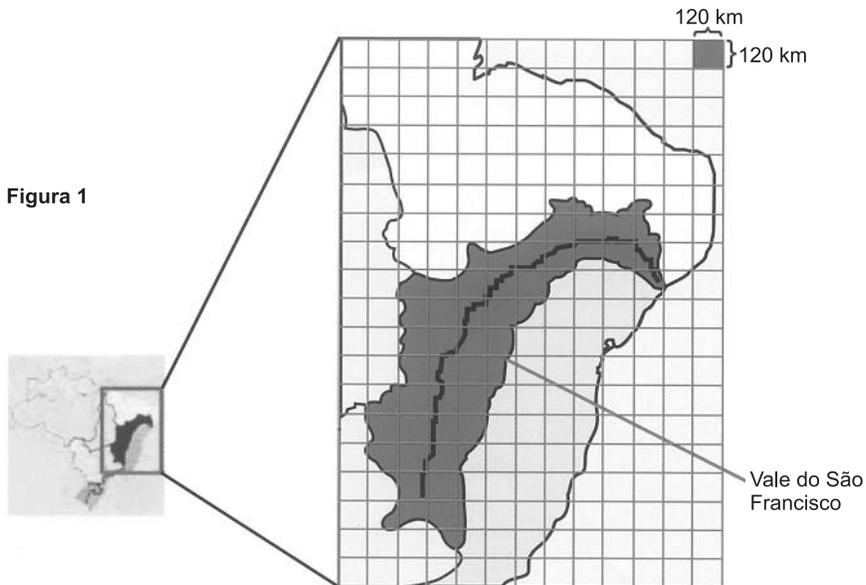


Matemática/Física

O Vale do São Francisco

O rio São Francisco recolhe as águas de uma área muito grande, maior que a área da França e de Portugal reunidas, formando uma das mais importantes bacias hidrográficas do Brasil. Nessa região, habitam cerca de 13 milhões de pessoas distribuídas por 464 municípios, cujas economias dependem do rio, de alguma forma, seja pelo aproveitamento das águas para irrigação, ou pela pesca, pela navegação, ou pela energia gerada nas hidroelétricas distribuídas em sua extensão.



Os “gaiolas” do São Francisco

Gaiolas: assim são chamadas as embarcações movidas a vapor destinadas à navegação fluvial, e que até os anos 60 predominavam no rio São Francisco. Da movimentação desses barcos dependia a economia da região, uma vez que, além de transportarem milhares de passageiros, abasteciam as cidades ribeirinhas e escoavam a produção local de algodão e cereais. Nessa época, o número de “gaiolas” era superior a trinta, embora apenas quatro fossem de grande porte.

Com a construção de estradas, os “gaiolas” foram sendo aposentados ou então transformados em barcos a diesel. Não foi o que ocorreu, entretanto, a um dos maiores, o “Benjamim Guimarães” (Figura 2), que teve um destino diferente. Após alguns anos de abandono, foi tombado pelo patrimônio histórico e restaurado. Segundo o engenheiro naval responsável pela obra, Odair Sanguino, o “Benjamim Guimarães” passou a ser a única embarcação do mundo movida a combustão de lenha.

Em agosto deste ano, após dois anos de trabalho no restauro, o barco foi reinaugurado e atualmente realiza pequenas viagens pelo Rio São Francisco, no trecho que contém a cidade de Pirapora-MG.

O “Benjamim Guimarães” move-se devagar, como é da natureza das embarcações fluviais. Pode-se vê-lo da margem, descendo o rio com velocidade média de 15 km/h e subindo com 9 km/h. Leva no convés a madeira que será consumida na fornalha, transformando a água da caldeira em vapor e gerando para o motor uma potência total de aproximadamente 90 hp. ($1\text{hp} \cong 750\text{ W}$).

Nas questões seguintes, eventualmente, você precisará de dados numéricos contidos no texto. Procure-os com atenção.

Sempre que necessário, utilize $g = 10\text{ m/s}^2$.

Figura 2

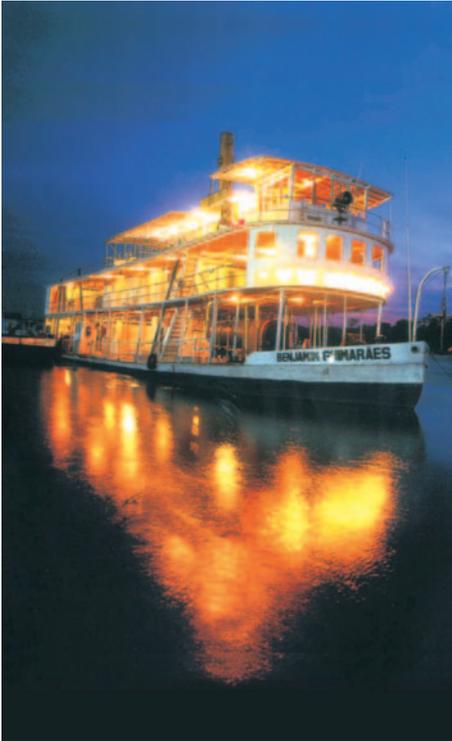


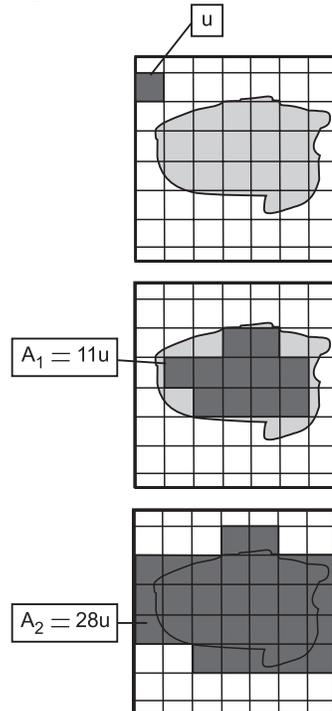
Foto de José Caldas - 2002

INSTRUÇÕES:

Nas respostas lembre-se de deixar seus processos de resolução claramente expostos.

Não basta escrever apenas o resultado final. É necessário mostrar os cálculos e/ou o raciocínio utilizado.

Figura 3



1. Para calcular o valor aproximado da área de uma região irregular, desenhada em escala em uma malha quadriculada - Figura 3 - pode-se utilizar o seguinte procedimento:

- Conta-se o número de unidades da malha contidas totalmente pela região A_1 .
- Conta-se o menor número de unidades da malha que envolve totalmente a região A_2 .
- Calcula-se a média aritmética entre as duas quantidades de unidades de malha contadas anteriormente.

● Conhecendo a área da unidade da malha, determina-se o valor aproximado da área da figura em questão.

a) Utilize esse procedimento para calcular a área da região do Vale do São Francisco representada no mapa da Figura 1. Escreva a resposta em quilômetros quadrados utilizando notação científica.

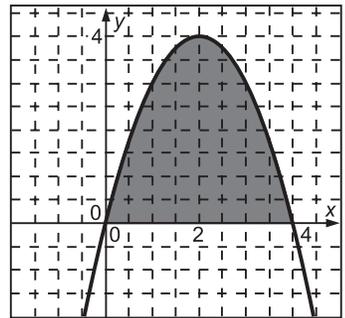
b) Determine a equação da função do 2º grau cujo gráfico é representado na Figura 4.

c) A área assinalada no gráfico da Figura 4 é numericamente igual à imagem da função

$$g(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} \text{ para } x = 4.$$

Mostre que o valor dessa área, obtida através da função $g(x)$, difere em menos de 10% do valor que se obtém utilizando o procedimento descrito anteriormente.

Figura 4



2. Qual é a velocidade da correnteza do rio São Francisco durante a viagem vagarosa do “Benjamim Guimarães”, supondo que a velocidade do barco em relação à água, isto é, sua velocidade própria, seja a mesma, subindo ou descendo o rio?

3. Admitindo que o motor da embarcação tenha rendimento de 50%, qual é a intensidade da resultante de forças contrárias à movimentação do barco num trecho da viagem no qual o barco executa movimento retilíneo uniforme?

4. Repleto de passageiros e tripulantes, o “Benjamim Guimarães” desloca um volume de água aproximadamente igual a $2,4 \cdot 10^2 \text{ m}^3$. Calcule quantas pessoas estão no barco considerando que a massa de cada uma delas é, em média, 80,0 kg e que a massa do barco é $2,24 \cdot 10^5 \text{ kg}$. Considere a densidade da água do rio como $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Resposta

1) a) Na região destacada do Vale do São Francisco, contam-se 22 unidades da malha totalmente interiores à região e, para o menor número de unidades da malha que envolve completamente a região destacada, contam-se 64 unidades. Assim, conforme o procedimento descrito, a área da região do Vale do São Francisco é, aproximadamente, $\frac{64 + 22}{2} \cdot 120^2 = 619\,200 \text{ km}^2 = 6,192 \cdot 10^5 \text{ km}^2$.

b) Seja $f(x)$ a função do 2º grau. Como as raízes, a partir do gráfico, são 0 e 4, temos $f(x) = a \cdot x \cdot (x - 4)$. Como $f(2) = 4$, $a \cdot 2 \cdot (2 - 4) = 4 \Leftrightarrow a = -1$ e, portanto, $f(x) = -x \cdot (x - 4) = -x^2 + 4x$.

c) Usando a função $g(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$, com $x = 4$, a área da região assinalada na figura 4 é $g(4) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}$.

Usando o procedimento descrito no item a, a área assinalada é, aproximadamente, $\frac{32 + 52}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{2}$.

Como $\frac{\frac{32}{3}}{\frac{21}{2}} \cong 1,016$, a área calculada por $g(x)$ é, aproximadamente, 1,6% superior à calculada pelo procedimento descrito, ou seja, difere em menos que 10%.

2) Supondo que a velocidade do barco em relação à água $v_{B/C}$ seja a mesma na subida ou descida, da composição dos movimentos, temos:

• Descida: $v_{B/M} = v_{B/C} + v_{C/M} \Rightarrow 15 = v_{B/C} + v_{C/M}$ (1)

• Subida: $v_{B/M} = v_{B/C} - v_{C/M} \Rightarrow 9 = v_{B/C} - v_{C/M}$ (2)

Fazendo (1) - (2) temos:

$$6 = 2v_{C/M} \Rightarrow v_{C/M} = 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

3) Como o barco executa movimento retilíneo uniforme, a força propulsora tem intensidade igual à resultante R das forças contrárias ao seu movimento. Assim, R é dada por:

$$\begin{cases} P_U = \eta P_T \\ P_U = R \cdot v_{B/C} \end{cases} \Rightarrow R \cdot v_{B/C} = \eta P_T \quad (3)$$

Sendo $v_{C/M} = 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, da equação (1) obtemos $v_{B/C}$ como segue:

$$15 = v_{B/C} + 3 \Rightarrow v_{B/C} = 12 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{10}{3} \text{ m/s}$$

Da equação (3) temos:

$$R \cdot \frac{10}{3} = 0,5 \cdot 90 \cdot 750 \Rightarrow R = 10\,125 \text{ N}$$

4) Sendo m o número de pessoas no barco, no equilíbrio, temos:

$$E = P_b + P_p \Rightarrow \mu_\ell V_{\ell d} \rho = m_b \cdot \rho + n \cdot m_p \cdot \rho \Rightarrow 1,0 \cdot 10^3 \cdot 2,4 \cdot 10^2 = 2,24 \cdot 10^5 + n \cdot 80,0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 200 \text{ pessoas}$$